

**CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA CELSO
SUCKOW DA FONSECA – CEFET/RJ**

**ANÁLISE DE FADIGA MULTIAXIAL EM
ELEMENTOS ESTRUTURAIS TUBULARES
SUJEITOS À VIBRAÇÃO FORÇADA**

Carlos Filipe Cardoso Bandeira

Prof. orientador: Paulo Pedro Kenedi, D.Sc.

Prof. co-orientador: Fernando Ribeiro da Silva, D.Sc.

Rio de Janeiro

Novembro de 2014

**CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA CELSO
SUCKOW DA FONSECA – CEFET/RJ**

**ANÁLISE DE FADIGA MULTIAXIAL EM
ELEMENTOS ESTRUTURAIS TUBULARES
SUJEITOS À VIBRAÇÃO FORÇADA**

Carlos Filipe Cardoso Bandeira

Projeto final apresentado em cumprimento às
normas do Departamento de Educação Superior
do CEFET/RJ, como parte dos requisitos para obtenção
do título de Bacharel em Engenharia Mecânica

Prof. orientador: Paulo Pedro Kenedi, D.Sc.

Prof. co-orientador: Fernando Ribeiro da Silva, D.Sc.

Rio de Janeiro

Novembro de 2014

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central do CEFET/RJ

B214 Bandeira, Carlos Filipe Cardoso
Análise de fadiga multiaxial em elementos estruturais tubulares sujeitos à
vibração forçada / Carlos Filipe Cardoso Bandeira – 2014.
97f. il.color. + anexos; enc.

Projeto Final (Graduação). Centro Federal de Educação Tecnológica
Celso Suckow da Fonseca ,2014.
Bibliografia : f. 97
Orientador: Paulo Pedro Kenedi
Co-orientador: Fernando Ribeiro da Silva

1. Materiais – Fadiga. 2. Resistência de materiais
I. Kenedi, Paulo Pedro (orient.). II. Silva, Fernando Ribeiro da (co-orient.).
III. Título.

CDD 620.1126

DEDICATÓRIA

Dedico esse projeto à minha querida avó Clara Barbosa Vinagre, que me acompanhou durante toda essa jornada, mas infelizmente, não está mais entre nós.

Dedico também aos meus pais, que são a razão do meu viver.

Dedico à minha tia Emília, que me deu condições de chegar até aqui.

Dedico aos meus irmãos, que sempre estiveram ao meu lado.

Dedico à minha namorada, que acima de tudo é minha companheira.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por ter me dado a oportunidade de realizar esse sonho de me tornar engenheiro mecânico.

Agradeço aos professores, Paulo Pedro Kenedi e Fernando Ribeiro da Silva, que aceitaram fazer parte desse projeto.

Agradeço a todos os professores, em especial ao professor Luis Felipe Guimarães, que sempre me orientou, confiou e acreditou nos meus trabalhos de pesquisa.

RESUMO

As estruturas metálicas são formadas pelos mais variados tipos de elementos e perfis, a fim de atender a um determinado requisito de projeto. Dentre os diversos tipos de elementos estruturais destacam-se os tubos de seção circular, pois possuem baixo peso próprio e boa rigidez, sendo bastante aplicados nos projetos mecânicos, desde elementos de ligação em estruturas treliçadas até em colunas de perfuração de poços de petróleo. Todo projeto deve prever os tipos de carregamento que irão atuar sobre a estrutura que está sendo projetada, que podem ser estáticos ou dinâmicos. Os dinâmicos são caracterizados por sua variação ao longo do tempo. Uma de suas grandes causas está relacionada com o fenômeno vibratório, que é muito comum em sistemas mecânicos em movimento. As vibrações forçadas geram um estado de tensão variável ao longo do tempo, podendo gerar uma falha por fadiga dos componentes. Esse estado tensão muitas vezes envolve tensões normais e de cisalhamento, caracterizando um estado multiaxial de tensões. Portanto, é de fundamental importância entender como a vibração forçada se relaciona com a fadiga multiaxial, de tal forma que se possa projetar uma estrutura capaz de resistir aos esforços dinâmicos que estão sendo aplicados sobre ela. Este trabalho propõe avaliar essa relação em um tubo metálico de seção circular, engastado em uma de suas extremidades. O estudo dinâmico foi desenvolvido para diferentes casos de carregamento, ressaltando o estado de tensão gerado para o ponto crítico da seção crítica. Em seguida, dois modelos de fadiga multiaxial baseados em tensão foram implementados, gerando algumas conclusões como, por exemplo, o efeito da defasagem dos carregamentos externos e da frequência de carregamento sobre a fadiga multiaxial. Por fim, um estudo de caso foi realizado utilizando o modelo dinâmico de uma coluna de perfuração de poço de petróleo vertical da referência [9], aplicando um critério de fadiga multiaxial para avaliar o acúmulo de dano no ponto crítico da seção crítica da estrutura.

Palavras-chave: Vibrações forçadas, Análise de tensão, Fadiga multiaxial.

ABSTRACT

The metallic structures are built with all types of elements and profiles in order to meet a particular design requirement. Among the various types of structural elements, highlight the tubes with circular section, because they have a low self weight and a good rigidity, being widely applied in mechanical design, since connecting elements in trusses to drill string oil well. Every project should provide the type of loading that will act on the structure which is being designed, which can be static or dynamic. The Dynamic loadings are characterized by its variation over time. One of its causes is related to the vibration phenomenon, which is very common in mechanical systems in motion. The forced vibrations generate a variable state of stress over time, which may cause a fatigue failure of the components. Many times, this state of stress is composed of shear and normal stress, characterizing a multiaxial state of stress. Therefore, it's very important to understand how the forced vibrations are related to the multiaxial fatigue, so that can design a structure able of withstanding the dynamic loadings that are being applied on it. This work proposes to evaluate this relation in a metallic tube with a circular cross section, fixed in one of its extremity. The dynamic study was developed for different cases of loading, emphasizing the state of stress generated of the critical point of critical section. Then, two multiaxial fatigue models based on stress were implemented, generating some conclusions as the effect of the lag loading and of the loading frequency on the multiaxial fatigue. Finally, a case study was developed with the drill string oil well dynamic model from reference [9], applying a multiaxial fatigue criteria to evaluate the cumulative damage of the critical point of critical section.

Key-words: Forced vibrations, Stress analysis, Multiaxial fatigue.

SUMÁRIO

Capítulo 1	1
Introdução	1
1.1 Motivação	1
1.2 Objetivo	2
1.3 Metodologia do Trabalho	2
Capítulo 2	4
Revisão Bibliográfica	4
2.1 Elementos Estruturais	4
2.1.1 Elementos Estruturais Tubulares	5
2.2 Vibrações Mecânicas	5
2.2.1 Conceitos Básicos de Vibrações Mecânicas	6
2.2.2 Vibração de Sistemas Discretos	7
2.2.3 Vibração de Sistemas Contínuos	8
2.2.3.1 Vibração Axial	9
2.2.3.2 Vibração Torcional	11
2.2.3.3 Vibração Transversal	14
2.3 Análises Numéricas via MEF	17
2.3.1 Determinação das Matrizes Locais de um Elemento Finito	18
2.3.1.1 Elemento de Barra Axial	18
2.3.1.2 Elemento de Barra Torcional	21
2.3.1.3 Elemento de Viga à Flexão	22
2.3.2 Matrizes Globais	24
2.3.3 Modelo Computacional	25
2.3.4 Análise de Tensões	26
2.3.4.1 Tensão Normal devido à Carga Transversal (Flexão)	26
2.3.4.2 Tensão Normal devido à Carga Axial	28
2.3.4.3 Tensão de Cisalhamento devido à Torção	29
2.4 Fadiga Estrutural	30
2.4.1 Fadiga Uniaxial	30
2.4.2 Fadiga Multiaxial	34
2.4.3 Modelos de Fadiga Multiaxial	37

2.4.3.1 Modelos Baseados em Tensão.....	38
2.4.3.1.1 Modelo de Sines.....	38
2.4.3.1.2 Modelo de Findley.....	39
2.4.3.2 Modelos baseados em deformação.....	41
2.4.3.3 Modelos baseados em energia.....	42
2.4.3.4 Modelos baseados na mecânica da fratura.....	42
Capítulo 3.....	43
Análises dinâmicas.....	43
3.1 Tubo Engastado com Forçamento Axial.....	43
3.2 Tubo Engastado com Forçamento Torçor.....	47
3.3 Tubo Engastado com Forçamento Transversal.....	50
3.4 Tubo Engastado com Forçamento Axial e Torçor.....	53
3.5 Tubo Engastado com Forçamento Transversal e Torçor.....	56
3.6 Tubo Engastado com Forçamento Axial e Transversal.....	58
3.7 Tubo Engastado com Forçamento Axial, Transversal e Torçor.....	60
3.8 Estudo do Efeito da Variação das Frequências de Forçamento.....	63
3.9 Estudo do Efeito da Ressonância.....	66
Capítulo 4.....	68
Análises de Fadiga Multiaxial.....	68
4.1 Carregamentos em Fase: Axial e Torçor.....	68
4.2 Carregamentos Fora de Fase: Axial e Torçor.....	74
4.3 – Forçamentos Fora de Fase: Transversal e Torçor.....	81
Capítulo 5.....	87
Estudo de caso: Coluna de Perfuração de Poço de Petróleo Vertical.....	87
5.1 Modelo Dinâmico.....	87
5.2 – Análises de Tensão.....	89
5.3 - Análise de Fadiga Multiaxial da Seção S1.....	90
Capítulo 6.....	96
Conclusões e Sugestões.....	96
Referências Bibliográficas.....	97
APÊNDICE.....	98
APÊNDICE A: Programa para análise dinâmica de vibração axial.....	98
APÊNDICE B: Programa para análise dinâmica de vibração torcional.....	100
APÊNDICE C: Programa para análise dinâmica de vibração transversal.....	103
APÊNDICE D: Programa para análise dinâmica de vibração axial e torcional.....	106

APÊNDICE E: Programa para análise dinâmica de vibração transversal e torcional.....	109
APÊNDICE F: Programa para análise dinâmica de vibração axial e transversal.	112
APÊNDICE G: Programa para análise dinâmica de vibração axial, transversal e torcional..	115
APÊNDICE H: Programa para análise de fadiga multiaxial.....	118

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1: Aplicações de elementos estruturais tubulares: (a) Plataformas de exploração de petróleo [8]; (b) Ponte treliçada [8].	4
FIGURA 2: Sistema massa-mola-amortecedor. (a) Vibração livre; (b) Vibração Forçada.	7
FIGURA 3: Formas de deslocamento: (a) axial; (b) angular; (c) transversal.	8
FIGURA 4: Barra submetida à vibração axial.	9
FIGURA 5: (a) Diagrama de corpo livre; (b) Diagrama cinético.	9
FIGURA 6: Eixo submetido à vibração torcional.	12
FIGURA 7: (a) Diagrama de corpo livre; (b) Diagrama cinético.	12
FIGURA 8: Viga submetida à vibração transversal.	14
FIGURA 9: (a) Diagrama de corpo livre; (b) Diagrama cinético.	15
FIGURA 10: Elemento de barra axial.	18
FIGURA 11: Elemento de barra torcional.	21
FIGURA 12: Elemento de viga em flexão.	22
FIGURA 13: Típica curva S-N [11].	30
FIGURA 14: Características das tensões para análise de fadiga [11].	32
FIGURA 15: Exemplo de aplicação do método rainflow [15].	34
FIGURA 16: Círculo de Mohr e a direção principal [11].	35
FIGURA 17: CP sem defasagem. Força axial (verde) e momento torçor (azul).	36
FIGURA 18: CNP com 45 graus de defasagem. Força axial (verde) e momento torçor (azul).	36
FIGURA 19: História das deformações para CP e CNP [14].	37
FIGURA 20: Exemplo de um estado de tensão com amplitude variável ao longo do tempo.	41
FIGURA 21: Tubo engastado.	43
FIGURA 22: Divisão do tubo em elementos finitos.	44
FIGURA 23: Modos normais de vibração do tubo.	45
FIGURA 24: Forçamento Axial.	45
FIGURA 25: Tensões máximas ao longo do tempo. (a) Seção do nó 2; (b) Ampliação; (c) Seção do nó 3; (d) Seção do nó 4.	46
FIGURA 26: Graus de liberdade dos nós.	47
FIGURA 27: Modos normais de vibração do tubo.	48
FIGURA 28: Forçamento torçor.	49

FIGURA 29: Tensões máximas ao longo do tempo. (a) Seção do nó 2; (b) Ampliação; (c) Seção do nó 3; (d) Seção do nó 4.	49
FIGURA 30: Graus de liberdade dos nós.	50
FIGURA 31: Modos normais de vibração do tubo.	51
FIGURA 32: Forçamento transversal.	52
FIGURA 33: Tensões máximas ao longo do tempo. (a) Seção do nó 1; (b) Ampliação; (c) Seção do nó 2; (d) Seção do nó 3.	53
FIGURA 34: Graus de liberdade dos nós.	53
FIGURA 35: Forçamentos, axial e torçor.	54
FIGURA 36: Tensões máximas ao longo do tempo na seção do nó 2. (a) Estado de tensão; (b) Ampliação; (c) Tensão equivalente de von Mises; (d) Ampliação.	55
FIGURA 37: Graus de liberdade dos nós.	56
FIGURA 38: Forçamentos, transversal e torçor.	57
FIGURA 39: Tensões máximas ao longo do tempo na seção do nó 1; (a) Estado de tensão; (b) Ampliação; (c) Tensão equivalente de von Mises; (d) Ampliação.	57
FIGURA 40: Graus de liberdade dos nós.	58
FIGURA 41: Forçamentos, transversal e axial.	59
FIGURA 42: Tensões máximas ao longo do tempo na seção do nó 1; (a) Estado de tensão; (b) Ampliação; (c) Tensão equivalente de von Mises; (d) Ampliação.	60
FIGURA 43: Graus de liberdade dos nós.	61
FIGURA 44: Forçamentos, transversal, axial e torçor.	61
FIGURA 45: Tensões máximas ao longo do tempo na seção do nó 1. (a) Estado geral de tensão; (b) Ampliação; (c) Tensão equivalente de von Mises; (d) Ampliação.	62
FIGURA 46: Tensões máximas ao longo do tempo na seção do nó 2 com $\omega_{fa} \neq \omega_{ft}$. (a) Estado de tensão; (b) Ampliação; (c) Tensão equivalente de von Mises; (d) Ampliação.	64
FIGURA 47: Estados de tensão.	65
FIGURA 48: Tensão equivalente de von Mises.	65
FIGURA 49: Comportamento das tensões ao longo do tubo, em função do modo normal de vibração.	67
FIGURA 50: Estado de tensão: $w_{fa} = w_{ft} = 200$ rad/s.	68
FIGURA 51: Direção da tensão principal. (a) Variação no tempo; (b) Ampliação.	69
FIGURA 52: Relação entre as deformações normais e de cisalhamento.	69
FIGURA 53: Ampliação da Figura 51(b).	70
FIGURA 54: Círculo de Mohr nos steps 100, 1000, 10000 e 40000.	71

FIGURA 55: Relação S_{ut} x δ_{Sines}	73
FIGURA 56: Relação F_0/T_0 x δ_{Sines}	74
FIGURA 57: Máxima variação da direção principal em função de w_{ft}/w_{fa}	75
FIGURA 58: Carregamentos fora de fase.	76
FIGURA 59: Tensão máxima de Von Mises em função de $\Delta\alpha$	77
FIGURA 60: Determinação do $\Delta\alpha_{crítico}$	77
FIGURA 61: Variação da tensão de cisalhamento em diferentes planos.....	78
FIGURA 62: Variação da tensão normal em diferentes planos.	79
FIGURA 63: Relação F_0/T_0 x $\delta_{Findley}$ para $\theta = 15^\circ$	80
FIGURA 64: Variação da direção da tensão principal ao longo do tempo.	81
FIGURA 65: Variação da máxima tensão equivalente de von Mises em função de $\Delta\alpha$	82
FIGURA 66: Ampliação da Figura 65.	82
FIGURA 67: Variação da tensão de cisalhamento em diferentes planos.....	83
FIGURA 68: Ampliação da Figura 67.	83
FIGURA 69: Variação da tensão normal em diferentes planos.	84
FIGURA 70: Ampliação da Figura 69.	84
FIGURA 71: Variação do parâmetro $\delta_{Findley}$ em função da espessura do tubo e.....	86
FIGURA 72: Esquema de uma coluna de perfuração de poço convencional [9].....	87
FIGURA 73: Modelo MEF da coluna de perfuração [9].....	88
FIGURA 74: Seções para análise de tensão da coluna.....	89
FIGURA 75: Variação da máxima tensão equivalente de von Mises.	90
FIGURA 76: Estado de tensão do ponto crítico da seção S1.	91
FIGURA 77: Estado de tensão do ponto crítico da seção S1.	92
FIGURA 78: Curva S-N estimada para o SAE 4340.	94

LISTA DE TABELAS

TABELA 1: Constantes de Findley para alguns materiais.....	40
TABELA 2: Propriedades geométricas e do material do tubo.....	44
TABELA 3: Frequências de forçamento utilizadas em cada caso.....	64
TABELA 4: Frequências de forçamento.....	66
TABELA 5: Dados para o círculo de Mohr.....	71
TABELA 6: Resumo dos cálculos de fadiga realizados.....	72
TABELA 7: Frequências de forçamento adotadas para nos casos 01, 02 e 03.....	75
TABELA 8: Defasagem $\Delta\alpha$ entre os carregamentos.....	76
TABELA 9: Máximas e mínimas tensões normais e de cisalhamento em diferentes direções.	79
TABELA 10: Parâmetro δ_{Findley} para diferentes direções θ	80
TABELA 11: Defasagem angular para os carregamentos.....	81
TABELA 12: Máximas e mínimas tensões normais e de cisalhamento em diferentes direções.	85
TABELA 13: Parâmetro δ_{Findley} para diferentes direções θ_p	85
TABELA 14: Dados mais relevantes do problema.....	89
TABELA 15: Classes de carregamento.....	93
TABELA 16: Parâmetro LE_{Findley} por classe de carregamento.....	93
TABELA 17: Número de ciclos para falha.....	94
TABELA 18: Resultados para o acúmulo de dano total e por classe de carregamento.....	95

LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS

ABREVIATURAS

MEF – Método dos Elementos Finitos

GDL – Graus de liberdade

DCL – Diagrama de corpo livre

DC – Diagrama cinético

CP – Carregamentos proporcionais

CNP – Carregamentos não proporcionais

SÍMBOLOS

k – Constante de rigidez de mola

m – Massa

c – Constante de amortecimento

$F(t)$ – Forçamento externo variável com o tempo

x, y, z – Sistema de coordenadas cartesianas

x – Posição

\dot{x} – Velocidade

\ddot{x} – Aceleração

n – Número de GDL

$[M]$ – Matriz global de massa

$[K]$ – Matriz global de rigidez

$[C]$ – Matriz global de amortecimento

$\{F(t)\}$ – Vetor global de forçamento

$\{x\}$ – Vetor global de posição

$\{\dot{x}\}$ – Vetor global de velocidade

$\{\ddot{x}\}$ – Vetor global de aceleração

ω – Frequência natural de vibração

ω_f = Frequência de forçamento

ω_{fa} = Frequência de forçamento axial

ω_{ft} = Frequência de forçamento torçor

ω_{ff} = Frequência de forçamento transversal

$[\omega]$ – Matriz de frequências naturais de vibração

$[X]$ – Matriz dos modos normais de vibração

$u(x, t)$ – Deslocamento axial

$\theta(x, t)$ – Deslocamento angular

$w(x, t)$ – Deslocamento transversal

w_i – Grau de liberdade do nó i

e_i – Elemento i

n_i – Nó i

L – Comprimento do tubo

l – Comprimento do elemento finito

ξ – Coordenada local

$A(x)$ – Área da seção transversal variável

A – Área da seção transversal constante

$I(x)$ – Momento de inércia de área variável

I – Momento de inércia de área constante

$J(x)$ – Momento polar de inércia de área variável

J – Momento polar de inércia de área constante

$E(x)$ – Módulo de elasticidade variável

E – Módulo de elasticidade constante

$G(x)$ – Módulo de elasticidade transversal variável

G – Módulo de elasticidade transversal constante

$\rho(x)$ – Massa específica variável

ρ – Massa específica constante

$f(x, t)$ – Forçamento axial externo por unidade de comprimento

$q(x, t)$ – Forçamento transversal externo por unidade de comprimento

$M_t(x, t)$ – Momento torçor externo por unidade de comprimento

t – Tempo

dx – Comprimento infinitesimal

$P(x, t)$ – Esforço axial interno

$\sigma(x)$ – Tensão normal

$\epsilon(x)$ – Deformação normal

$\varphi(x)_i$ – Função de forma do nó i de um dado elemento

$u(t)_i$ – Resposta temporal do grau de liberdade i de um dado elemento

b – Largura da seção transversal da viga

h – Altura da seção transversal da viga

S_y – Limite de escoamento do material

S_{ut} – Limite de resistência do material

σ'_f – Coeficiente de resistência à fadiga

b – Expoente de resistência à fadiga

N_f – Número de ciclos até a falha

α_{Sines} – Constante do critério de falha de Sines

β_{Sines} – Constante do critério de falha de Sines

S_L – Limite de resistência à fadiga uniaxial para um carregamento totalmente alternado

S_{LP} – Limite de resistência à fadiga uniaxial para um carregamento pulsativo

σ_x - Tensão normal na direção x

σ_y - Tensão normal na direção y

τ_{xy} - Tensão de cisalhamento no plano xy

Capítulo 1

Introdução

Elementos estruturais são encontrados em todas as máquinas e equipamentos utilizados na indústria mecânica e são responsáveis por resistir às cargas de serviço e ao peso próprio da estrutura. A análise estática desses elementos é de fundamental importância no que tange à resistência dos materiais dos quais são feitos. A partir dessa análise, tensões e deformações são determinadas a fim de compará-las com os valores admissíveis do projeto e verificar se a estrutura falha ou não.

Embora a análise estática seja sempre realizada, muitos elementos estruturais também são submetidos a esforços dinâmicos que variam com o tempo. Esses esforços induzem vibrações ao longo de toda a estrutura que afetam sua estabilidade, geram ruídos e reduzem sua vida útil. Além disso, eles alteram o estado de tensões e deformações desses elementos a cada instante, gerando um problema de fadiga estrutural muito conhecido na engenharia.

A falha por fadiga é muito comum em elementos estruturais sujeitos a esforços dinâmicos. Geralmente ela ocorre sob tensões inferiores à tensão limite de resistência do material, ou até mesmo à tensão limite de escoamento, e sem aviso prévio. A fadiga pode ser de natureza uniaxial, quando as tensões atuam em uma única direção, ou multiaxial, quando um estado complexo de tensões de naturezas distintas está presente numa dada seção transversal.

Dessa forma, o estudo da relação entre a vibração forçada e a resistência à fadiga de elementos estruturais é de extrema importância para o projeto mecânico, para que se possa projetar estruturas sem risco de falhas e com uma vida útil longa.

1.1 Motivação

Diversos componentes mecânicos estão submetidos a forçamentos variáveis no tempo que o fazem vibrar de alguma forma. Essas vibrações forçadas geram estados de tensão que

também variam no tempo e que são dependentes de vários fatores, como por exemplo, da inércia do corpo. Esses estados de tensão são os grandes causadores da fadiga de um componente estrutural.

Estudos mostram que dentre as diversas causas de falhas de componentes mecânicos, a mais comum é a por fadiga estrutural. Do número total de falhas, as provocadas por fadiga estão em torno de 75%, sendo que na maioria das vezes, essas falhas ocorrem de maneira catastrófica e sem aviso aparente [1]. Portanto, é de suma importância que o projeto de componentes estruturais submetidos a carregamentos variáveis no tempo tenha uma análise criteriosa de sua vida em fadiga.

1.2 Objetivo

O presente trabalho pretende entender a relação entre dois fenômenos: vibração e fadiga multiaxial, ambos presentes em elementos estruturais sujeitos a carregamentos dinâmicos complexos. Tal relação deve ser capaz de mostrar como uma determinada estrutura deve ser projetada, de tal forma a impedir que as tensões resultantes devido aos forçamentos externos, gerem um dano crítico à estrutura.

Para isso, estudou-se o comportamento de um elemento estrutural tubular, feito de aço carbono 1020 e submetido a diversos tipos de forçamento. As respostas dinâmicas foram analisadas, como por exemplo, as frequências naturais de vibração e, principalmente o estado de tensão crítico para cada caso. Em seguida, estudos de fadiga multiaxial foram aplicados em alguns casos dinâmicos a fim de saber se o elemento estrutural falharia ou não. Por fim, um estudo de caso foi desenvolvido utilizando o modelo dinâmico de uma coluna de perfuração de poço de petróleo vertical desenvolvido pela referência [9].

1.3 Metodologia do Trabalho

O presente trabalho foi realizado em cinco etapas principais, sendo elas: Revisão bibliográfica; análises dinâmicas; análises de fadiga multiaxial; estudo de caso; conclusões.

Na revisão bibliográfica, conceitos e definições importantes são discutidos a fim de fornecer o embasamento teórico necessário para o desenvolvimento do trabalho. Nas análises

dinâmicas, o método dos elementos finitos foi utilizado e desenvolvido computacionalmente no programa MATLAB^R. Nas análises de fadiga multiaxial, dois casos dinâmicos foram amplamente estudados. No estudo de caso, utilizou-se o modelo dinâmico da referência [9] para a aplicação dos critérios de fadiga multiaxial, verificando o máximo dano acumulado da estrutura. Após o desenvolvimento das análises, várias conclusões foram obtidas.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

Esse capítulo aborda os conceitos teóricos que se aplicam nesse trabalho. Termos, definições, desenvolvimentos e equações são abordados para que, posteriormente, possam servir como ferramentas no desenvolvimento das análises.

2.1 Elementos Estruturais

Estruturas são sistemas compostos de vários elementos conectados entre si e às partes externas, construídas para suportar ou transferir forças e resistir de forma segura às cargas aplicadas sobre elas [2]. Na engenharia, as estruturas metálicas são muito utilizadas, como por exemplo, no projeto de pontes treliçadas e de plataformas de exploração de petróleo, como mostra a Figura 1.

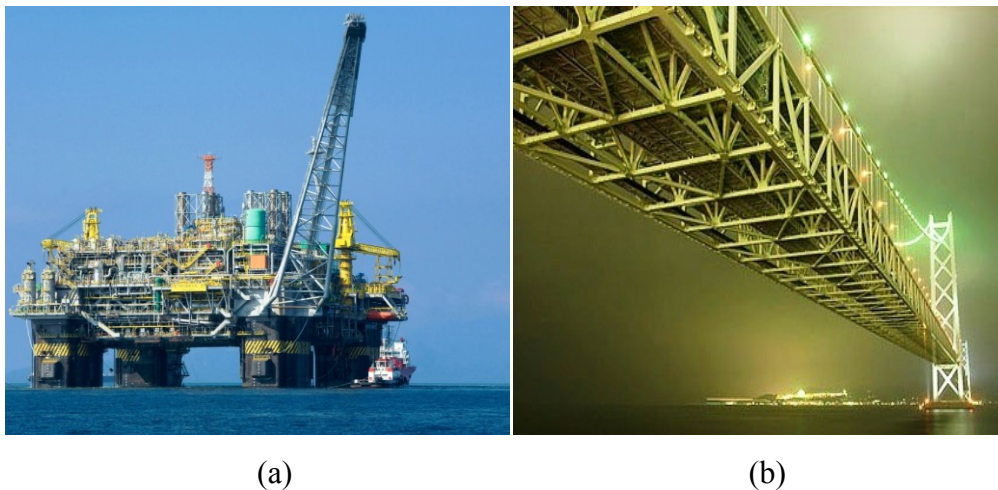


Figura 1: Aplicações de elementos estruturais tubulares: (a) Plataformas de exploração de petróleo [8]; (b) Ponte treliçada [8].

Os elementos estruturais que compõe essas estruturas são os responsáveis por receber e transmitir os esforços atuantes sobre a estrutura como um todo e podem ser dos mais variados tipos, tais como: vigas, colunas, barras, chapas, tubos, entre outros. Cada tipo de

elemento pode ter uma geometria diferente, principalmente quando se refere à sua seção transversal, que pode ser retangular, triangular, quadrada, circular, etc.

2.1.1 Elementos Estruturais Tubulares

Os tubos estruturais estão sendo cada vez mais utilizados na indústria mecânica e de construção civil, pois são elementos com baixo peso próprio, capazes de resistir a esforços de tração, compressão, torção, flexão, pressão interna, e até uma combinação desses. Além disso, os tubos com seção transversal circular apresentam a mesma resistência à flambagem em todas as direções, o que é muito bom para o projeto de elementos sujeitos à compressão.

2.2 Vibrações Mecânicas

O fenômeno da vibração está presente na maioria dos sistemas mecânicos. Os primeiros estudiosos da área se dedicaram a estudar o comportamento dos fenômenos naturais e a desenvolver as teorias matemáticas necessárias para descrever a vibração de sistemas físicos [3]. Mais tarde, os pesquisadores passaram a aplicar todo o conhecimento teórico na solução de problemas muito comuns na engenharia.

Em 1902, Frahm investigou a importância da consideração da análise de vibração torcional no projeto de eixos e hélices de navios a vapor. Aurel Stodola (1859 – 1943) contribuiu para o estudo da vibração de vigas, placas e membranas, desenvolvendo um método para analisar vigas vibratórias. Stephen Timoshenko (1878 – 1972) apresentou uma teoria aperfeiçoada de vibração de vigas que ficou conhecida como a teoria de Timoshenko ou de viga grossa, que considera os efeitos da inércia de rotação e da deformação por cisalhamento [3].

Vibrações são oscilações de um sistema mecânico ou estrutural em torno da sua posição de equilíbrio. Elas se iniciam quando um elemento inercial é deslocado da sua posição de equilíbrio devido à imposição de energia ao sistema através de uma fonte externa [4].

A maioria dos motores de acionamento tem problemas de vibração devido a um desbalanceamento inerente a essas máquinas. Locomotivas em alta velocidade podem sofrer um descarrilamento em função do afastamento de suas rodas em até 10 mm do trilho. De

forma natural, as estruturas projetadas para apoiar máquinas centrífugas pesadas como motores e turbinas estão sujeitas à vibração. Em todas as situações, a estrutura ou o componente pode sofrer um desgaste pré-maturo de suas peças, além de falhar devido à fadiga do material, resultante da variação cíclica da tensão induzida [3].

Apesar de seus efeitos danosos, a vibração pode ser utilizada a favor em várias aplicações industriais, como por exemplo, em esteiras transportadoras, compactadores, máquinas de lavar, tremonhas e peneiras. Além disso, já foi constatado que a vibração melhora a eficiência de certos processos de usinagem, fundição, forjamento e soldagem [3].

2.2.1 Conceitos Básicos de Vibrações Mecânicas

Qualquer movimento que se repita após um intervalo de tempo é denominado vibração ou oscilação. Em geral, um sistema vibratório inclui um meio para armazenar energia potencial, sua rigidez, outro para armazenar energia cinética, sua massa, e um que perde energia ao longo do tempo, seu amortecimento [3].

Um sistema precisa ser determinado por um número mínimo de coordenadas independentes, de tal forma que sua resposta dinâmica possa ser obtida em qualquer posição e instante de tempo. Esse valor mínimo define o número de graus de liberdade de um sistema vibratório. Sistemas com um número finito de GDL são do tipo discreto, enquanto que os com infinitos GDL são do tipo contínuo. Na maioria das vezes, sistemas contínuos são aproximados como sendo discretos e as soluções são obtidas de uma maneira simplificada.

Um sistema discreto com n GDL possui n equações diferenciais ordinárias de segunda ordem acopladas, ou seja, equações que dependem de todas as coordenadas. Isso faz com que a solução geral do sistema tenha n modos normais de vibração, ou seja, n combinações das proporções de amplitudes de cada GDL correspondentes às n frequências naturais de vibração.

Quando um sistema não está submetido a uma força externa, ele tende a vibrar por conta própria após ser retirado da sua posição de equilíbrio, sendo essa situação chamada de vibração livre. Por outro lado, se ele estiver submetido a uma força externa, além de vibrar livremente, ele também vibrará em função do forçamento, dando origem à vibração forçada. A Figura 2 exemplifica esses tipos de vibração.

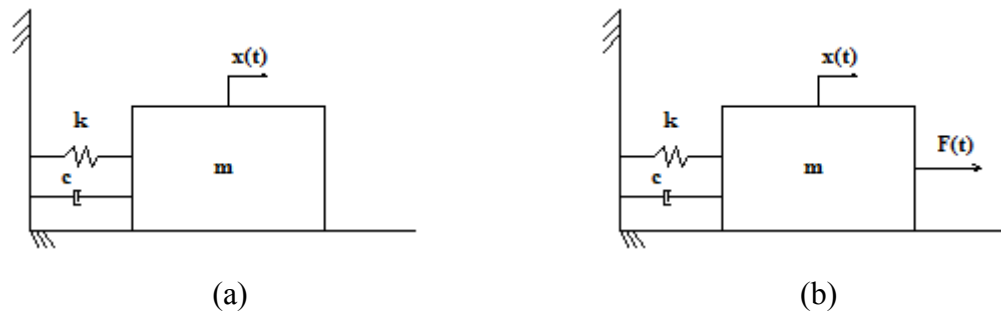


Figura 2: Sistema massa-mola-amortecedor. (a) Vibração livre; (b) Vibração Forçada.

2.2.2 Vibração de Sistemas Discretos

Vários sistemas mecânicos podem ser idealizados como sendo discretos, sem haver perda significativa de resultados. O sistema massa-mola-amortecedor pode ser utilizado para representar tais sistemas mecânicos, sendo de fundamental importância a definição das variáveis k , m , c e $F(t)$ para a correta solução.

As equações de movimento de um sistema vibratório podem ser derivadas por vários métodos: pela segunda lei de Newton, princípio de D'Alembert, princípio dos deslocamentos virtuais e pelo princípio da conservação da energia. Tomando a Figura 2(b) como referência, e utilizando a segunda lei de Newton, pode-se chegar à equação do movimento vibratório desse sistema discreto com um GDL, representada pela Equação 3.

$$\sum_{\rightarrow+} F_x = m\ddot{x} \quad (1)$$

$$F(t) - kx - c\dot{x} = m\ddot{x} \quad (2)$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \quad (3)$$

A Equação 3 pode ser expandida para o caso de um sistema com n GDL, se tornando uma equação matricial, definida pela Equação 4:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F(t)\} \quad (4)$$

A solução da Equação 4 é realizada em duas etapas. Na primeira, considera-se que o sistema vibra livremente, $\{F(t)\} = \{0\}$, para encontrar as frequências naturais, $[\omega]$, e seus respectivos modos normais de vibração, $[X]$. Em seguida, para $\{F(t)\} \neq \{0\}$, a solução particular para $\{x(t)\}$ é calculada em função do tipo de forçamento externo $\{F(t)\}$.

2.2.3 Vibração de Sistemas Contínuos

Há muitos casos de sistemas contínuos que não é possível identificar massas, amortecedores ou molas, como elementos discretos. Dessa forma, considera-se uma distribuição contínua da massa, do amortecimento e da elasticidade, além da condição de que cada elemento de massa infinitesimal do sistema pode vibrar.

Todos os objetos sólidos são feitos de materiais deformáveis. A hipótese de um sólido rígido simplifica uma análise, mas dependendo da aplicação, não fornece respostas muito precisas. Elementos estruturais tais como barras, colunas, vigas, eixos, tubos, são exemplos de sistemas contínuos [4].

Uma variável independente de posição, x , é utilizada para definir as posições de todos os pontos vibratórios pertencentes ao sistema. Os deslocamentos axial, transversal e angular, são funções tanto de x quanto do tempo, t . Isso faz com que a equação de governo do sistema seja do tipo diferencial parcial e não diferencial ordinária, como se vê nos sistemas discretos. A Figura 3 ilustra esses possíveis deslocamentos em um sistema contínuo, representado por uma viga engastada.

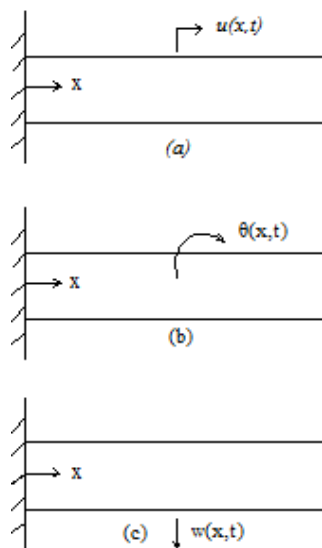


Figura 3: Formas de deslocamento: (a) axial; (b) angular; (c) transversal.

2.2.3.1 Vibração Axial

Para a análise da vibração axial de elementos contínuos, considere uma barra hipotética de comprimento L com área, módulo de elasticidade e massa específica, variáveis ao longo do seu comprimento. Além disso, considere também que a barra está sendo submetida a um forçamento externo por unidade de comprimento, $f(x, t)$. A Figura 4 ilustra essa barra.

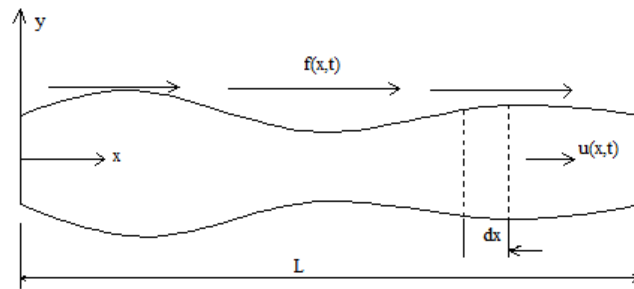


Figura 4: Barra submetida à vibração axial.

Tomando-se um elemento diferencial dessa barra localizado a uma distância x da origem do sistema de coordenadas, é possível traçar os diagramas de corpo livre e cinético, DCL e DC , respectivamente, para quantificar quais são as forças axiais atuantes nesse elemento. A Figura 5 mostra esses diagramas.

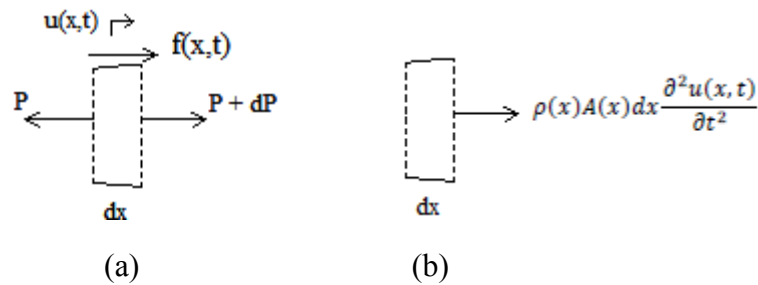


Figura 5: (a) Diagrama de corpo livre; (b) Diagrama cinético.

Igualando o somatório das forças dos dois diagramas, uma vez que o sistema encontra-se dinamicamente definido, obtém-se a Equação 8.

$$\sum_{DCL} F_x = \sum_{DC} F_x \quad (5)$$

$$-P(x, t) + f(x, t)dx + P(x, t) + dP(x, t) = \rho(x) A(x)dx \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (6)$$

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial x} dx + f(x, t)dx = \rho(x) A(x)dx \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (7)$$

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial x} + f(x, t) = \rho(x) A(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (8)$$

No entanto, pela resistência dos materiais, sabe-se que:

$$\sigma(x) = E(x)\epsilon(x) = E(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \quad (9)$$

$$P(x) = \sigma(x)A(x) \quad (10)$$

$$P(x, t) = A(x)E(x)\epsilon(x) = A(x)E(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \quad (11)$$

Substituindo a Equação 11 na 8:

$$\frac{\partial [A(x)E(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}]}{\partial x} + f(x, t) = \rho(x) A(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (12)$$

A Equação 12 é a equação geral de movimento para a vibração axial forçada de uma barra não uniforme e não homogênea. Alguns casos particulares que são vistos na prática da engenharia podem ser resolvidos a partir da Equação 12 com algumas modificações.

Como exemplo, se a barra for uniforme e homogênea, suas propriedades deixam de ser uma função de x e passam a ser constantes, então:

$$\frac{\partial [AE \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}]}{\partial x} + f(x, t) = \rho A \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (13)$$

$$AE \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t) = \rho A \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (14)$$

Se além das premissas anteriores, também for considerado que o forçamento externo é nulo, caso de vibração livre, a Equação 14 fica igual à Equação 17.

$$AE \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \rho A \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (15)$$

$$E \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (16)$$

$$c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}, \text{ onde } c = \sqrt{E/\rho} \text{ é constante.} \quad (17)$$

A Equação 17 mostra que o movimento devido à vibração axial livre de uma barra com propriedades constantes, é independente da sua seção transversal. Isso implica, por exemplo, que o comportamento vibratório livre de uma barra de aço de seção circular é o

mesmo que o de uma barra de seção retangular, dado que todas as outras propriedades são iguais.

As Equações 12, 14 e 17 são equações diferenciais parciais de segunda ordem, pois a variável que define o movimento, $u(x, t)$, é uma função de duas variáveis. Suas soluções dependem das condições iniciais, que são funções do tempo, e das de contorno, que são funções do deslocamento. Para a Equação 17, por exemplo, uma solução-tentativa seria supor que $u(x, t)$ é uma função formada por duas outras funções, uma só de x e outra só de t , como definido pela Equação 18.

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (18)$$

Substituindo a Equação 18 na 17, chega-se na solução apresentada pela Equação 19.

$$u(x, t) = X(x)T(t) = \left(A_1 \cos \frac{\omega x}{c} + B_1 \sin \frac{\omega x}{c}\right) \left(A_2 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t\right) \quad (19)$$

Onde: A_1, B_1, A_2 e $B_2 \in \mathbb{R}$ e $c = \sqrt{E/\rho}$ são constantes.

Para definir os valores de A_1, B_1, A_2 e B_2 , é necessário aplicar as condições de contorno e iniciais do sistema, que variam caso a caso. Além disso, como o sistema é contínuo, infinitos, porém contáveis, elementos estão vibrando, logo, ω não assume um único valor, ou seja, a resposta dinâmica possui infinitas, porém contáveis, frequências naturais e modos normais de vibração.

2.2.3.2 Vibração Torcional

Para a análise da vibração torcional de elementos contínuos, considere um eixo hipotético de comprimento L com momento de inércia de área, módulo de elasticidade transversal e massa específica, variáveis ao longo do seu comprimento. Além disso, considere também que o eixo está sendo submetido a um momento torçor externo por unidade de comprimento, $M_t(x, t)$. A Figura 6 ilustra esse eixo.

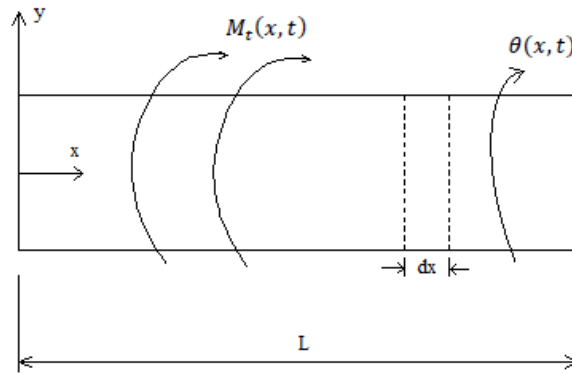


Figura 6: Eixo submetido à vibração torcional.

Do mesmo modo como foi feito para o caso axial, considere um elemento diferencial de espessura dx retirado desse eixo. Para esse caso, assume-se que esse elemento possui seção transversal circular e por isso, quando torcido, tem um deslocamento angular sempre no mesmo plano, sem gerar distorções. Traçam-se os diagramas *DCL* e *DC*, a fim de verificar quais os esforços atuantes sobre ele, como mostra a Figura 7.

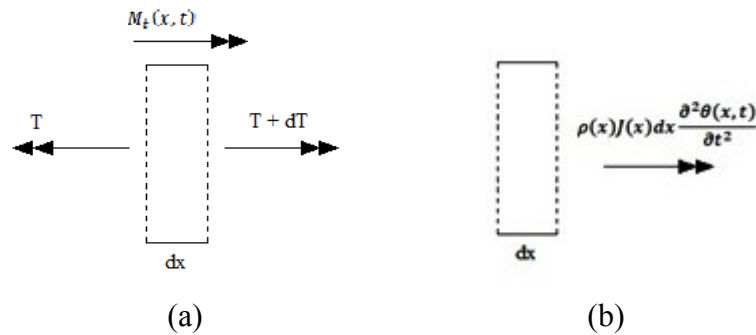


Figura 7: (a) Diagrama de corpo livre; (b) Diagrama cinético.

Igualando o somatório dos torques dos dois diagramas, obtém-se a Equação 23.

$$\sum_{DCL} T(x, t) = \sum_{DC} T(x, t) \quad (20)$$

$$-T(x, t) + M_t(x, t)dx + T(x, t) + dT(x, t) = \rho(x)J(x)dx \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} \quad (21)$$

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} dx + M_t(x, t)dx = \rho(x)J(x)dx \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} \quad (22)$$

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} + M_t(x, t) = \rho(x)J(x) \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} \quad (23)$$

No entanto, pela resistência dos materiais, sabe-se que:

$$T(x, t) = J(x)G(x) \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \quad (24)$$

Substituindo a Equação 24 na 23:

$$\frac{\partial \left[J(x)G(x) \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \right]}{\partial x} + M_t(x, t) = \rho(x)J(x) \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} \quad (25)$$

A Equação 25 é a equação geral de movimento para a vibração torcional forçada de um eixo não uniforme, não homogêneo e com deformação angular plana. No entanto, se o mesmo for uniforme e homogêneo, suas propriedades deixam de ser uma função de x e passam a ser constantes, alterando a solução da equação de movimento para a Equação 27.

$$\frac{\partial \left[JG \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \right]}{\partial x} + M_t(x, t) = \rho J \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} \quad (26)$$

$$GJ \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} + M_t(x, t) = \rho J \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} \quad (27)$$

Se considerarmos o caso de vibração livre, ou seja, $M_t(x, t) = 0$, a equação de movimento passa a ser a Equação 30.

$$GJ \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} = \rho J \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} \quad (28)$$

$$G \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} \quad (29)$$

$$s^2 \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2}, \text{ onde } s = \sqrt{G/\rho} \text{ é constante.} \quad (30)$$

As Equações 25, 27 e 30 são aplicáveis somente a eixos que possuem uma deformação angular sempre no mesmo plano, sem haver distorções. De forma geral, os elementos de seção transversal circular respondem muito bem a esse critério, enquanto que os de seção retangular, não.

A Equação 30 é uma equação diferencial parcial com o mesmo formato da Equação 17, só que com a variável dependente $\theta(x, t)$. Isso faz com que a resposta vibratória desse eixo seja igual à da barra, incluindo o fato da independência da seção transversal do eixo, que nesse caso se apresenta com a propriedade geométrica J , ao invés da área.

Da mesma forma que na vibração axial, a solução dessas equações diferenciais depende das condições iniciais e de contorno. No caso da Equação 30, uma solução-tentativa seria igual à fornecida pela Equação 18, obtendo-se o mesmo tipo de resposta vibratória para $\theta(x, t)$, como se vê no desenvolvimento abaixo:

$$\theta(x, t) = X(x)T(t) \quad (31)$$

$$\theta(x, t) = X(x)T(t) = \left(D_1 \cos \frac{\omega x}{s} + E_1 \sin \frac{\omega x}{s}\right) (D_2 \cos \omega t + E_2 \sin \omega t) \quad (32)$$

Onde D_1, E_1, D_2 e $E_2 \in \mathbb{R}$ e $s = \sqrt{G/\rho}$ são constantes.

A definição das constantes D_1, E_1, D_2 e E_2 segue a mesma orientação definida para o caso de vibração axial. Além disso, ω continua não assumindo um único valor, ou seja, a resposta dinâmica para a vibração torcional também possui infinitas, porém contáveis, frequências naturais e modos normais de vibração.

2.2.3.3 Vibração Transversal

Para a análise da vibração transversal, considere uma viga hipotética de comprimento L com área, momento de inércia de área, módulo de elasticidade e massa específica, variáveis ao longo do seu comprimento. Considere também que a viga está sendo submetida a um forçamento transversal externo por unidade de comprimento, $q(x, t)$. A Figura 8 ilustra essa viga.

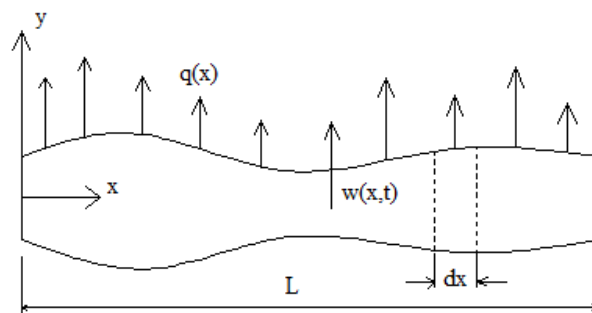


Figura 8: Viga submetida à vibração transversal.

Da mesma forma, considere um elemento diferencial de comprimento dx dessa viga. Além disso, a seção transversal dessa viga permanecerá plana, quando fletida. Traçando os diagramas *DCL* e *DC*, é possível identificar as forças e momentos fletores que estão atuando nas seções desse elemento, como mostra a Figura 9.

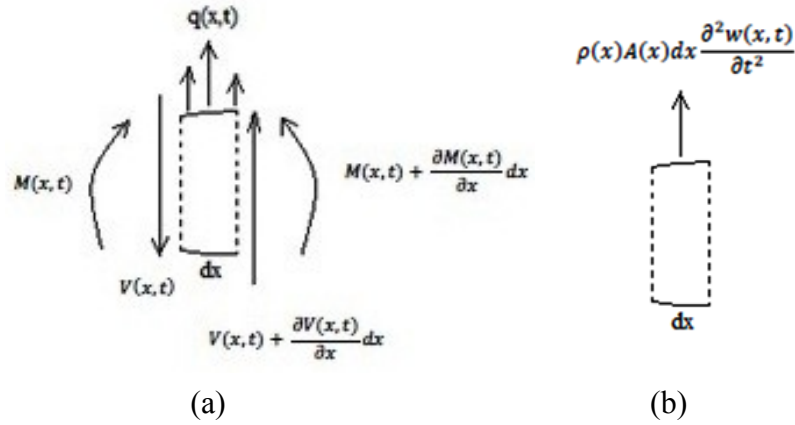


Figura 9: (a) Diagrama de corpo livre; (b) Diagrama cinético.

Igualando o somatório das forças e dos momentos dos dois diagramas, tem-se que:

$$\sum_{DCL} F(x, t) = \sum_{DC} F(x, t) \quad (33)$$

$$\sum_{DCL} M(x, t) = \sum_{DC} M(x, t) \quad (34)$$

Resolvendo a Equação 33:

$$V(x, t) + \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} dx + q(x, t)dx - V(x, t) = \rho(x)A(x)dx \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \quad (35)$$

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} dx + q(x, t)dx = \rho(x)A(x)dx \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \quad (36)$$

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} + q(x, t) = \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \quad (37)$$

Resolvendo a Equação 34:

$$M(x, t) + \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} dx + V(x, t)dx + \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} dx dx + q(x, t)dx \frac{dx}{2} - M(x, t) = 0 \quad (38)$$

$$\frac{\partial M(x, t)}{\partial x} dx + V(x, t)dx = 0 \quad (39)$$

$$\frac{\partial M(x, t)}{\partial x} = -V(x, t) \quad (40)$$

Substituindo a Equação 40 na 37, obtém-se a Equação 42.

$$-\frac{\partial \left[\frac{\partial M(x,t)}{\partial x} \right]}{\partial x} + q(x,t) = \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \quad (41)$$

$$-\frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} + q(x,t) = \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \quad (42)$$

No entanto, pela resistência dos materiais, sabe-se que:

$$M(x,t) = E(x)I(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \quad (43)$$

Substituindo a Equação 43 na 42:

$$-\frac{\partial^2 \left[E(x)I(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right]}{\partial x^2} + q(x,t) = \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \quad (44)$$

$$\frac{\partial^2 \left[E(x)I(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right]}{\partial x^2} + \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = q(x,t) \quad (45)$$

A Equação 45 é a equação de movimento para a vibração transversal forçada de uma viga não uniforme e não homogênea. No entanto, se ela for uniforme e homogênea, suas propriedades deixam de ser uma função de x e passam a ser constantes, resultando na nova equação de movimento definida pela Equação 47.

$$\frac{\partial^2 \left[EI \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right]}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = q(x,t) \quad (46)$$

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = q(x,t) \quad (47)$$

Se considerarmos o caso de vibração livre, ou seja, $q(x,t) = 0$, então a equação de movimento passa a ser definida pela Equação 49.

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (48)$$

$$r^2 \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0, \text{ onde } r = \sqrt{EI/\rho A}. \quad (49)$$

As respostas do movimento vibratório transversal são equações diferenciais parciais de quarta ordem, diferentemente dos outros dois casos já estudados. É possível verificar também, através da Equação 49, que toda vibração transversal livre depende das propriedades geométricas da seção transversal em estudo, o que também não acontece para os outros casos.

A solução das Equações 45, 47 e 49 depende das condições iniciais e de contorno. Em particular, como $w(x, t)$ possui uma derivada de quarta ordem com relação a x e outra de segunda ordem com relação a t , são necessárias quatro condições de contorno e duas condições iniciais para sua solução. No caso da Equação 49, uma solução-tentativa seria igual à fornecida pelas Equações 18 e 31, e após as devidas substituições, sua solução seria a definida pela Equação 51.

$$w(x, t) = X(x)T(t) \quad (50)$$

$$w(x, t) = (F_1 \cos dx + G_1 \sin dx + F_2 \cosh dx + G_2 \sinh dx) (F_3 \cos gt + G_3 \sin gt) \quad (51)$$

Onde $F_1, G_1, F_2, G_2, F_3, G_3 \in \mathbb{R}$; $r = \sqrt{EI/\rho A}$; $g = \sqrt{\frac{\rho A \omega^2}{EI}}$ e $d = \sqrt[4]{\frac{\rho A \omega^2}{EI}}$ são constantes.

2.3 Análises Numéricas via *MEF*

Como se pôde ver no tópico anterior, a análise de vibrações de sistemas contínuos requer uma matemática complexa. Considerando um caso extremo, no qual um sistema é formado por vários elementos contínuos e é submetido a diversos tipos de forçamento externo, tal solução analítica seria tão complexa quanto tediosa. Isso ocorre durante o projeto de tubulações industriais, por exemplo, pois a quantidade de arranjo de tubulações pode ser tão grande, que torna inviável realizar essas análises com métodos analíticos.

O grande desenvolvimento da computação digital motivou a criação e a aplicação de métodos numéricos na solução de diversos problemas da engenharia, inclusive nas análises de vibração. Elementos finitos, diferenças finitas e elementos de contorno, são alguns desses métodos utilizados.

O *MEF* é um método numérico comumente utilizado para dar soluções tanto no campo da estática quanto no da dinâmica. Sua aplicação em sistemas contínuos requer que eles sejam divididos em um número finito de elementos discretos. Cada elemento é basicamente formado por dois nós, localizados em suas extremidades, e é através deles que a relação de continuidade interelementar acontece [4].

Com os elementos e nós bem definidos, equações de equilíbrio e compatibilidade são construídas, admitindo serem funções contínuas capazes de representar o campo de deslocamentos no domínio do elemento. A partir de então, obtém-se o estado de deformações dos elementos e, através de relações constitutivas da resistência dos materiais, chega-se aos estados de tensão [5].

O *MEF* propõe um desenvolvimento do problema através de uma álgebra matricial simplificada. Em função disso, todas as propriedades fundamentais de uma análise de vibração precisam ser formuladas matricialmente, tais como a massa, o amortecimento, a rigidez e o forçamento, para cada elemento finito, formando assim, as matrizes locais do sistema contínuo. Posteriormente, as matrizes locais de cada propriedade são utilizadas para formar sua matriz global, que representa o sistema contínuo como um todo.

2.3.1 Determinação das Matrizes Locais de um Elemento Finito

Esse tópico abordará o desenvolvimento matemático que calcula as respectivas matrizes de massa e rigidez de cada elemento finito, quando seus nós estão sujeitos aos mais diversos tipos de GDL.

2.3.1.1 Elemento de Barra Axial

Considere um elemento de barra com comprimento l . Esse elemento tem dois GDL representados por w_1 , deslocamento axial do nó esquerdo, e w_2 , deslocamento axial do nó direito. Define-se uma coordenada local do elemento, ξ , $0 \leq \xi \leq l$, ao longo do eixo do elemento. A Figura 10 mostra esse elemento.

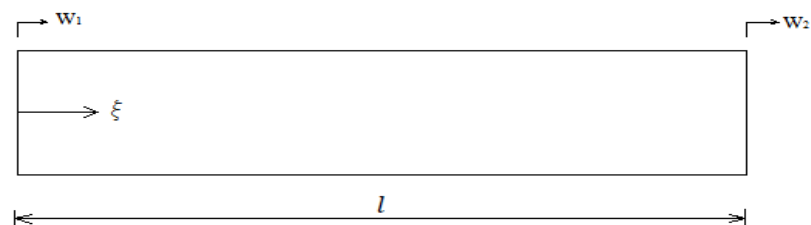


Figura 10: Elemento de barra axial.

A função deslocamento do elemento, $u(\xi, t)$, deve ser considerada como sendo linear, como mostra a Equação 52 [4]:

$$u(\xi, t) = \frac{1}{l}(w_2 - w_1)\xi + w_1 \quad (52)$$

A energia cinética desse elemento, T , assumindo que suas propriedades geométricas e do seu material são constantes, é igual a:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A \left(\frac{\partial u(\xi, t)}{\partial t} \right)^2 d\xi \quad (53)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A \left(\frac{\partial \left[\frac{1}{l}(w_2 - w_1)\xi + w_1 \right]}{\partial t} \right)^2 d\xi \quad (54)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A \left(\frac{1}{l}(\dot{w}_1 - \dot{w}_2)\xi + \dot{w}_1 \right)^2 d\xi \quad (55)$$

$$T = \frac{1}{2} \frac{\rho A l}{3} (\dot{w}_1^2 + \dot{w}_1 \dot{w}_2 + \dot{w}_2^2) \quad (56)$$

A Equação 56 pode ser reescrita na forma quadrática:

$$T = \frac{1}{2} [\dot{w}^T] [m] [\dot{w}] \quad (57)$$

Onde $\{w\} = [w_1 \quad w_2]^T$ é o vetor deslocamento do elemento.

$$T = \frac{1}{2} \frac{\rho A l}{3} [\dot{w}_1 \quad \dot{w}_2] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \end{bmatrix} \quad (58)$$

Então a matriz de massa, $[m]_{axial}$, do elemento de barra é:

$$[m]_{axial} = \frac{\rho A l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (59)$$

A energia potencial desse elemento, V , assumindo que suas propriedades geométricas e do seu material são constantes, é:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EA \left(\frac{\partial u(\xi, t)}{\partial \xi} \right)^2 d\xi \quad (60)$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EA \left(\frac{\partial \left[\frac{1}{l}(w_2 - w_1)\xi + w_1 \right]}{\partial \xi} \right)^2 d\xi \quad (61)$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EA \left[\frac{1}{l} (w_2 - w_1) \right]^2 d\xi \quad (62)$$

$$V = \frac{1}{2} \frac{EA}{l} (w_2^2 - 2w_1w_2 + w_1^2) \quad (63)$$

A Equação 63 pode ser reescrita na forma quadrática:

$$V = \frac{1}{2} [w^T][k][w] \quad (64)$$

$$V = \frac{1}{2} \frac{EA}{l} [w_1 \quad w_2] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \quad (65)$$

Então a matriz de rigidez, $[k]_{axial}$, do elemento de barra é:

$$[k]_{axial} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (66)$$

Supondo agora que o elemento está sujeito a um forçamento externo, $f(\xi, t)$. Então, o trabalho virtual, δW , realizado por essa força sobre o elemento de barra é:

$$\delta W = \int_0^l f(\xi, t) \delta u(\xi, t) d\xi \quad (67)$$

$$\delta W = \int_0^l f(\xi, t) \left[\frac{1}{l} (\delta w_2 - \delta w_1) \xi + \delta w_1 \right] d\xi \quad (68)$$

$$\delta W = \delta w_1 \int_0^l f(\xi, t) \left(1 - \frac{\xi}{l} \right) d\xi + \delta w_2 \int_0^l f(\xi, t) \left(\frac{\xi}{l} \right) d\xi \quad (69)$$

Dessa forma, as forças generalizadas q_1 e q_2 , atuantes nos nós 1 e 2, respectivamente, são iguais a:

$$q_1 = \int_0^l f(\xi, t) \left(1 - \frac{\xi}{l} \right) d\xi \quad (70)$$

$$q_2 = \int_0^l f(\xi, t) \left(\frac{\xi}{l} \right) d\xi \quad (71)$$

2.3.1.2 Elemento de Barra Torcional

Considere o mesmo elemento de barra do item 2.3.1, só que agora com os dois GDL representados por w_1 , deslocamento angular do nó esquerdo, e w_2 , deslocamento angular do nó direito, em torno do seu eixo longitudinal. A Figura 11 representa esse elemento.

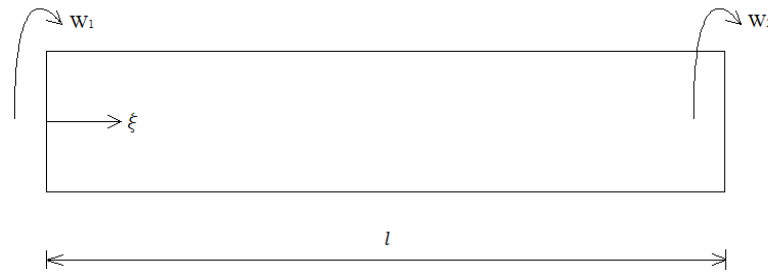


Figura 11: Elemento de barra torcional.

A função deslocamento do elemento, $\theta(\xi, t)$, deve ser considerada como sendo linear, como mostra a Equação 72 [4].

$$\theta(\xi, t) = \left(1 - \frac{\xi}{l}\right) w_1 + \frac{\xi}{l} w_2 \quad (72)$$

Realizando os mesmos procedimentos para os cálculos de T , V e δW , conclui-se que:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho J \left(\frac{\partial \theta(\xi, t)}{\partial t} \right)^2 d\xi \quad (73)$$

$$[m]_{torção} = \frac{\rho J l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (74)$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l J G \left(\frac{\partial \theta(\xi, t)}{\partial \xi} \right)^2 d\xi \quad (75)$$

$$[k]_{torção} = \frac{GJ}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (76)$$

Supondo agora que o elemento está sujeito a um torque externo, $f(\xi, t)$. Então, o trabalho virtual, δW , realizado por esse torque sobre o elemento de barra é:

$$\delta W = \int_0^l f(\xi, t) \delta \theta(\xi, t) d\xi \quad (77)$$

$$q_1 = \int_0^l f(\xi, t) \left(1 - \frac{\xi}{l}\right) d\xi \quad (78)$$

$$q_2 = \int_0^l f(\xi, t) \left(\frac{\xi}{l} \right) d\xi \quad (79)$$

2.3.1.3 Elemento de Viga à Flexão

Considere um elemento de viga com quatro GDL representados por w_1 , deslocamento transversal do nó esquerdo, w_2 , deslocamento angular do nó esquerdo em torno do eixo perpendicular ao plano do papel, w_3 , deslocamento transversal do nó direito e w_4 , deslocamento angular do nó direito também em torno do eixo perpendicular ao plano do papel. A Figura 12 representa esse elemento.

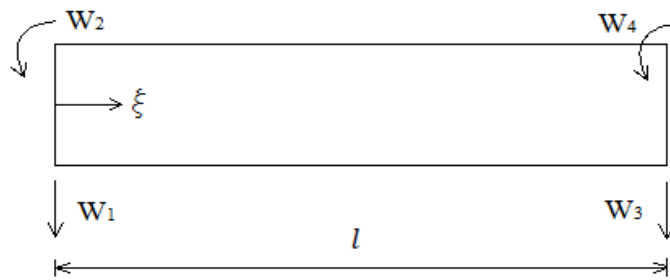


Figura 12: Elemento de viga em flexão.

A função deslocamento do elemento, $u(\xi, t)$, deve ser considerada como mostra a Equação 80 [4]:

$$u(\xi, t) = C_1 \xi^3 + C_2 \xi^2 + C_3 \xi + C_4 \quad (80)$$

Onde C_i , $i = 1, 2, 3, 4$ são constantes de integração que devem ser calculadas em função das condições de contorno do elemento.

A Equação 80 deve ser tal que satisfaça as condições de contorno do elemento, que são:

$$u(0, t) = w_1 \quad (81)$$

$$\frac{du}{d\xi}(0, t) = w_2 \quad (82)$$

$$u(l, t) = w_3 \quad (83)$$

$$\frac{du}{d\xi}(l, t) = w_4 \quad (84)$$

Dessa forma, substituindo as Equações 81, 82, 83 e 84 na Equação 80:

$$C_1 = \frac{1}{l^3}(2w_1 + lw_2 - 2w_3 + lw_4) \quad (85)$$

$$C_2 = \frac{1}{l^2}(-3w_1 - 2lw_2 + 3w_3 - lw_4) \quad (86)$$

$$C_3 = \frac{w_2}{l} \quad (87)$$

$$C_4 = w_1 \quad (88)$$

Substituindo as Equações 85, 86, 87 e 88 na equação 80:

$$u(\xi, t) = \left(1 - 3\frac{\xi^2}{l^2} + 2\frac{\xi^3}{l^3}\right)w_1 + \left(\frac{\xi}{l} - 2\frac{\xi^2}{l^2} + \frac{\xi^3}{l^3}\right)w_2 + \left(3\frac{\xi^2}{l^2} - 2\frac{\xi^3}{l^3}\right)w_3 + \left(-\frac{\xi^2}{l^2} + \frac{\xi^3}{l^3}\right)w_4 \quad (89)$$

Realizando os mesmos procedimentos para os cálculos de T, V e δW , conclui-se que:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A \left(\frac{\partial u(\xi, t)}{\partial t} \right)^2 d\xi \quad (90)$$

$$[m]_{flexão} = \frac{\rho A l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (91)$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial \xi^2} \right)^2 d\xi \quad (92)$$

$$[k]_{flexão} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (93)$$

Supondo agora que o elemento está sujeito a uma força externa, $f(\xi, t)$. Então, o trabalho virtual, δW , realizado por essa força sobre o elemento de barra, gera as forças e momentos generalizados:

$$q_1 = \int_0^l f(\xi, t) \left(1 - 3\frac{\xi^2}{l^2} + 2\frac{\xi^3}{l^3} \right) d\xi \quad (94)$$

$$q_2 = \int_0^l f(\xi, t) \left(\frac{\xi}{l} - 2\frac{\xi^2}{l^2} + \frac{\xi^3}{l^3} \right) l d\xi \quad (95)$$

$$q_3 = \int_0^l f(\xi, t) \left(3 \frac{\xi^2}{l^2} - 2 \frac{\xi^3}{l^3} \right) d\xi \quad (96)$$

$$q_4 = \int_0^l f(\xi, t) \left(-\frac{\xi^2}{l^2} + \frac{\xi^3}{l^3} \right) l d\xi \quad (97)$$

2.3.2 Matrizes Globais

Até o momento as matrizes de massa, rigidez e forçamento foram definidas para cada tipo de elemento a partir de uma análise local, ou seja, para somente um elemento. No entanto, uma análise estrutural é realizada dividindo-se a estrutura em n elementos, com n suficiente para representar o comportamento de toda a estrutura.

Dessa forma, cada elemento possui uma matriz local de massa, $[m]$, de rigidez, $[k]$, de amortecimento, $[c]$ e de forçamento, $[f(t)]$. Sendo assim, para avaliar um sistema composto por n elementos, é preciso fornecer as matrizes globais da estrutura como um todo, $[M]$, $[K]$, $[C]$, $[F(t)]$, e não somente as locais de cada elemento. A composição de cada uma dessas matrizes é feita levando-se em consideração o número total de graus de liberdade de todo o sistema, que vai depender do tipo de elemento que está sendo analisado. Tal composição é feita através das Equações 98, 99, 100 e 101.

$$[M] = \sum_{i=1}^n [S]_i^T [m]_i [S]_i \quad (98)$$

$$[K] = \sum_{i=1}^n [S]_i^T [k]_i [S]_i \quad (99)$$

$$[C] = \sum_{i=1}^n [S]_i^T [c]_i [S]_i \quad (100)$$

$$[F(t)] = \sum_{i=1}^n [S]_i^T [f(t)]_i [S]_i \quad (101)$$

Onde i representa cada elemento, n é o número total de elementos e $[S]_i$ é uma matriz de transformação, de ordem pxq , onde p é igual ao número de linhas da matriz local e q é

igual ao número de graus de liberdade não nulos. Para montar a matriz de transformação, é necessário seguir o passo-a-passo descrito abaixo:

1- Monte uma matriz identidade de ordem $v \times v$, onde v é o número total de *GDL* do sistema;

2- Exclua as colunas referentes aos *GDL* nulos;

3- Identifique os *GDL* relacionados com o elemento em questão e exclua as linhas que não possuem os graus de liberdade desse elemento.

Depois de montar as matrizes globais do sistema, a Equação 102 é formada.

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F(t)\} \quad (102)$$

2.3.3 Modelo Computacional

A maioria dos problemas encontrados na engenharia possui uma complexidade muito elevada, fazendo com que além da análise dinâmica ser realizada via *MEF*, ela é toda desenvolvida via modelagem computacional.

Para isso, vários programas podem ser utilizados, como por exemplo, o MATLAB^R. Nesse caso, para implementar o programa é necessário transformar a equação diferencial de segunda ordem, Equação 102, em outra de primeira ordem, Equação 104, através da seguinte substituição de variáveis:

$$\dot{u} = v \quad (103)$$

Substituindo a Equação 103 na 102, tem-se que:

$$[M]\{\dot{v}\} + [C]\{v\} + [K]\{u\} = \{F(t)\} \quad (104)$$

Explicitando $\{\dot{v}\}$, tem-se que:

$$[M]^{-1}[M]\{\dot{v}\} + [M]^{-1}[C]\{v\} + [M]^{-1}[K]\{u\} = [M]^{-1}\{F(t)\} \quad (105)$$

$$[I]\{\dot{v}\} + [M]^{-1}[C]\{v\} + [M]^{-1}[K]\{u\} = [M]^{-1}\{F(t)\} \quad (106)$$

$$\{\dot{v}\} = -[M]^{-1}[C]\{v\} - [M]^{-1}[K]\{u\} + [M]^{-1}\{F(t)\} \quad (107)$$

Reescrevendo a Equação 107 na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [0] \\ [M]^{-1} \end{bmatrix} \{F(t)\} \quad (108)$$

A Equação 108 é introduzida em alguma rotina de programação que calcula os resultados de \dot{u} e \dot{v} .

2.3.4 Análise de Tensões

Em função do tipo de elemento utilizado na análise de elementos finitos e do tipo de forçamento externo, tensões normais e de cisalhamento serão geradas na estrutura, atuando de forma separada ou combinada.

A análise de tensões em estruturas sujeitas à vibração forçada é de fundamental importância para seus respectivos projetos. Em cima dessas tensões é que critérios de falha e de projeto serão comparados de modo a garantir sua integridade estrutural, tanto com relação ao escoamento do material como, principalmente, com relação à sua vida em fadiga.

2.3.4.1 Tensão Normal devido à Carga Transversal (Flexão)

Considere as relações abaixo, provenientes da resistência dos materiais [6], que determinam o comportamento de um material metálico, sujeito à flexão pura, em regime elástico:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (109)$$

$$\varepsilon = \frac{c}{\rho} \quad (110)$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (111)$$

Onde c = maior distância entre a linha neutra e a superfície da seção transversal e ρ = o raio de curvatura do elemento.

Substituindo as Equações 110 e 111 na Equação 109, tem-se que:

$$\sigma(x, t) = Ec \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (112)$$

Utilizando a Equação 113 como uma solução aproximada para $u(x, t)$, então:

$$u(x, t) = \sum_i \varphi_i(x) u_i(t) \quad (113)$$

$$\sigma_i(x, t) = Ec \frac{\partial^2 (\sum_i \varphi_i(x) u_i(t))}{\partial x^2} \quad (114)$$

$$\sigma_i(x, t) = Ec \sum_i \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} u_i(t) \quad (115)$$

A variável $\varphi_i(x)$ corresponde às funções de forma, ou interpolantes, e $u_i(t)$ a resposta temporal de cada elemento, para cada *GDL*. Considerando que para uma viga em flexão, cada elemento possui uma função de forma, então:

$$\sigma_i(x, t) = Ec \left[\frac{\partial^2 \varphi_1(x)}{\partial x^2} u_1(t) + \frac{\partial^2 \varphi_2(x)}{\partial x^2} u_2(t) + \frac{\partial^2 \varphi_3(x)}{\partial x^2} u_3(t) + \frac{\partial^2 \varphi_4(x)}{\partial x^2} u_4(t) \right] \quad (116)$$

Onde:

$$\varphi_1(x) = 1 - 3 \frac{x^2}{l^2} + 2 \frac{x^3}{l^3} \quad (117)$$

$$\varphi_2(x) = \left(\frac{x}{l} - 2 \frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3} \right) l \quad (118)$$

$$\varphi_3(x) = 3 \frac{x^2}{l^2} - 2 \frac{x^3}{l^3} \quad (119)$$

$$\varphi_4(x) = \left(-\frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3} \right) l \quad (120)$$

A Equação 116 mostra que as tensões normais devido à flexão calculadas em uma estrutura, variam em função da sua posição e do tempo. Dessa forma, escolhendo uma seção crítica da estrutura, a tensão calculada passa a ser somente função do tempo. Essa dependência do tempo faz com que um estudo de fadiga seja, inevitavelmente, realizado no projeto dessas estruturas.

2.3.4.2 Tensão Normal devido à Carga Axial

Considere as relações abaixo, provenientes da resistência dos materiais [6], que determinam o comportamento de um material metálico, sujeito à carga axial, em regime elástico:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (121)$$

$$\varepsilon = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \quad (122)$$

Substituindo a Equação 122 na 121:

$$\sigma = E \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \quad (123)$$

Substituindo a Equação 113 na 123:

$$\sigma_i = E \frac{\partial [\sum_i \varphi_i(x) u_i(t)]}{\partial x} \quad (124)$$

$$\sigma_i = E \sum_i \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} u_i(t) \quad (125)$$

Considerando que para um elemento sujeito à carga axial, cada elemento possui uma função de forma, então:

$$\sigma_i = E \left[\frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x} u_1(t) + \frac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x} u_2(t) \right] \quad (126)$$

Onde:

$$\varphi_1(x) = 1 - \frac{x}{l} \quad (127)$$

$$\varphi_2(x) = \frac{x}{l} \quad (128)$$

2.3.4.3 Tensão de Cisalhamento devido à Torção

Considere as relações abaixo, provenientes da resistência dos materiais [6], que determinam o comportamento de um material metálico sujeito somente à torção:

$$\gamma_{m\acute{a}x} = c \frac{d\phi}{dx} \quad (129)$$

$$\tau_{m\acute{a}x} = G\gamma_{m\acute{a}x} \quad (130)$$

Onde $\gamma_{m\acute{a}x}$ = máxima deformação por cisalhamento, c = máxima distância entre a linha neutra e a superfície da seção transversal e ϕ é o ângulo de torção.

Substituindo a Equação 129 na 130, tem-se que:

$$\tau_{m\acute{a}x} = Gc \frac{d\phi}{dx} \quad (131)$$

Utilizando a Equação 113 como uma solução aproximada para $\phi(x, t)$, então:

$$\tau_{m\acute{a}x} = Gc \frac{\partial [\sum_i \varphi_i(x) u_i(t)]}{\partial x} \quad (132)$$

$$\tau_{m\acute{a}x} = Gc \sum_i \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} u_i(t) \quad (133)$$

Considerando que para um elemento em torção, cada elemento possui uma função de forma, então:

$$\tau_{m\acute{a}x} = Gc \left[\frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x} u_1(t) + \frac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x} u_2(t) \right] \quad (134)$$

Onde:

$$\varphi_1(x) = 1 - \frac{x}{l} \quad (135)$$

$$\varphi_2(x) = \frac{x}{l} \quad (136)$$

2.4 Fadiga Estrutural

A resposta de uma estrutura sujeita a carregamentos variáveis ao longo do tempo é diferente daquela obtida quando esses são estáticos. Na maioria das vezes um corpo é menos resistente a cargas variáveis do que a cargas estáticas. Diz-se então que a fadiga estrutural é o ramo da resistência dos materiais que estuda a deterioração mecânica dos corpos sujeitos a carregamentos variáveis ao longo do tempo [10].

As análises de fadiga podem ser divididas basicamente em duas classes, a uniaxial e a multiaxial. A fadiga uniaxial estuda o efeito, ao longo do tempo, de carregamentos que geram tensões em uma única direção, enquanto a multiaxial, de carregamentos que geram tensões em direções distintas e /ou de naturezas diferentes.

Hoje, a percepção da indústria é a de que a abordagem uniaxial já não atende mais às necessidades de projeto, por conta da presença de carregamentos complexos multiaxiais e não proporcionais a que componentes mecânicos, em condições reais de serviço, estão submetidos. Dessa forma, torna-se imprescindível o correto estudo e entendimento do fenômeno de fadiga multiaxial para a solução de diferentes problemas de engenharia [10].

2.4.1 Fadiga Uniaxial

Para determinar a resistência dos materiais sob a ação de cargas de fadiga, diversos ensaios em corpos de prova padronizados devem ser realizados. Como resultado, curvas de fadiga são definidas na qual a ordenada representa a resistência à fadiga e a abscissa o número de ciclos para a fratura. Essas curvas são chamadas de curvas S-N. A Figura 13 mostra uma típica curva S-N.

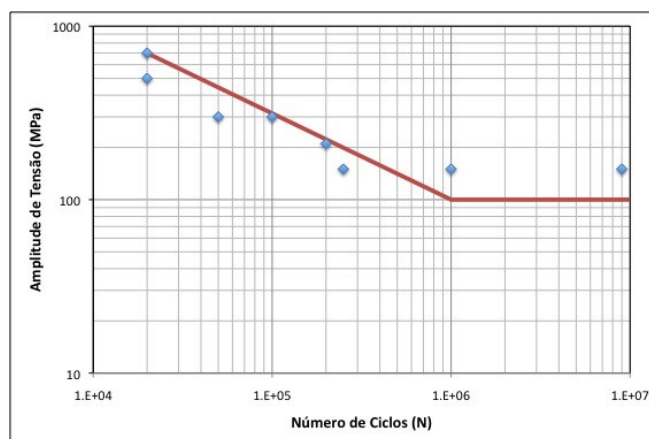


Figura 13: Típica curva S-N [11].

Segundo [16], os limites de fadiga S'_e dos materiais podem ser estimados através de equações, ao invés de realizar uma grande quantidade de testes. Para aços, calcula-se S'_e em função do S_{ut} do material, conforme definem as Equações 137 e 138.

$$S'_e = 0,5.S_{ut}, \text{ se } S_{ut} \leq 1400 \text{ MPa} \quad (137)$$

$$S'_e = 700 \text{ MPa}, \text{ se } S_{ut} > 1400 \text{ MPa} \quad (138)$$

Esses valores de S'_e são os casos de corpos de prova para ensaio de fadiga por flexão rotativa. Na realidade, as peças em serviço possuem condições de acabamento, por exemplo, que tendem a reduzir esse valor de S'_e para S_e . Essa redução é realizada com a aplicação de diversos fatores, tais como, K_a, K_b, K_c onde:

$$K_a a' S_{ut}^{b'} \quad (139)$$

$$K_b = 1,51. d^{-0,157} \text{ se } 51 < d \leq 254 \text{ mm} \quad (140)$$

Onde d é o diâmetro externo da seção transversal e a' e b' são constantes tabeladas.

$$K_c = 1 \text{ para flexão} - 0,85 \text{ para axial} - 0,59 \text{ para torção} \quad (141)$$

$$S_e = (K_a K_b K_c) S'_e \quad (142)$$

Onde K_a é o fator de condição superficial, K_b é o fator de tamanho e K_c é o fator de carga.

Sendo assim, pode-se aproximar a curva de fadiga de alto ciclo S-N, através da equação (143), onde S_f é a tensão de resistência à fadiga para um dado número de ciclos N .

$$S_f = aN^b \quad (143)$$

$$a = \frac{(f S_{ut})^2}{S_e} \quad (144)$$

$$b = -\frac{1}{3} \log\left(\frac{f S_{ut}}{S_e}\right) \quad (145)$$

$$f = 0,9 \text{ se } S_{ut} < 490 \text{ MPa} \quad (146)$$

O estado de tensão sobre o qual uma análise de fadiga deve ser realizada pode se apresentar de diversas formas. Pode ser harmônico e periódico, não harmônico e periódico,

totalmente alternado, pulsativo, aleatório, entre outros. A Figura 14 mostra as características gerais das tensões no desenvolvimento de um estudo de fadiga.

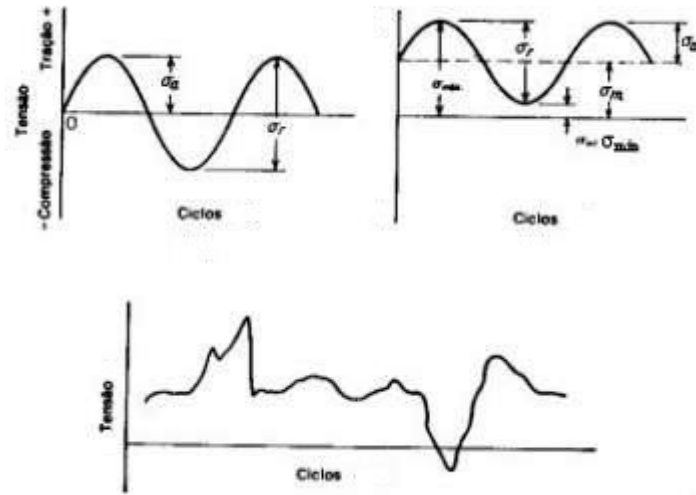


Figura 14: Características das tensões para análise de fadiga [11].

Pela Figura 14, podem ser identificadas as tensões alternadas e médias, σ_a e σ_m , respectivamente, definidas pelas Equações 147 e 148 [16].

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{m\acute{a}x} - \sigma_{m\acute{i}n}}{2} \quad (147)$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{m\acute{a}x} + \sigma_{m\acute{i}n}}{2} \quad (148)$$

Onde $\sigma_{m\acute{a}x}$ é a tensão máxima e $\sigma_{m\acute{i}n}$ a tensão mínima.

Diferentes critérios podem ser utilizados para avaliar o limite de uma peça em fadiga sob cargas médias e alternadas. Critérios como o de Soderberg, Googman modificado, Gerber, estão entre os possíveis a serem utilizados. A Equação 149 define o critério de Goodman modificado, por exemplo [16].

$$\frac{\sigma_a}{S_e} + \frac{\sigma_m}{S_{ut}} = \frac{1}{FS} \quad (149)$$

Para o caso onde as tensões atuantes são de amplitude variável, ou seja, quando sua amplitude varia ao longo do tempo, se faz necessário quantificar o dano causado por cada parcela das tensões. Essas parcelas são constituídas por um número finito de ciclos, a partir dos quais se faz o agrupamento dos danos. A regra de Palmgren-Miner é a mais utilizada para

contabilizar o dano de todas as classes, D , caracterizando o acúmulo de dano. A equação (150) define essa teoria:

$$D = \sum \frac{n_i}{N_i} = \frac{1}{FS} \quad (150)$$

Onde n_i é o número de ciclos na classe de tensão σ_i , N_i é o número de ciclos até a falha do material na classe de tensão σ_i , e FS é o fator de segurança. O valor de N_i pode ser estimado através da Equação 143, o através da equação de Basquin, quando não se tem o diagrama S-N da região de vida finita do material, entre 10^3 e 10^6 ciclos, obtido através de métodos experimentais.

A determinação de n_i pode ser bastante trabalhosa e difícil quando o estado de tensão é aleatório. No entanto, é de fundamental importância a correta definição do número de ciclos n_i para cada classe de carregamento. A ideia da contagem de ciclos é transformar uma história de carregamentos complexa em diferentes classes de carregamentos de amplitudes constantes. Alguns métodos de contagem de ciclos como o Rainflow, peak, range, racetrack podem ser utilizados [15].

O método rainflow é o mais popular e o mais preciso entre os métodos existentes. Ele faz uma analogia à queda de uma gota de chuva sobre o telhado de uma casa, escorregando sobre ele até cair no chão. Para a aplicação do método é necessário que o eixo do tempo ou número de ciclos seja posicionado na vertical representando a história dos picos e vales [11]. A Figura 15 mostra um exemplo de aplicação do método rainflow [15].

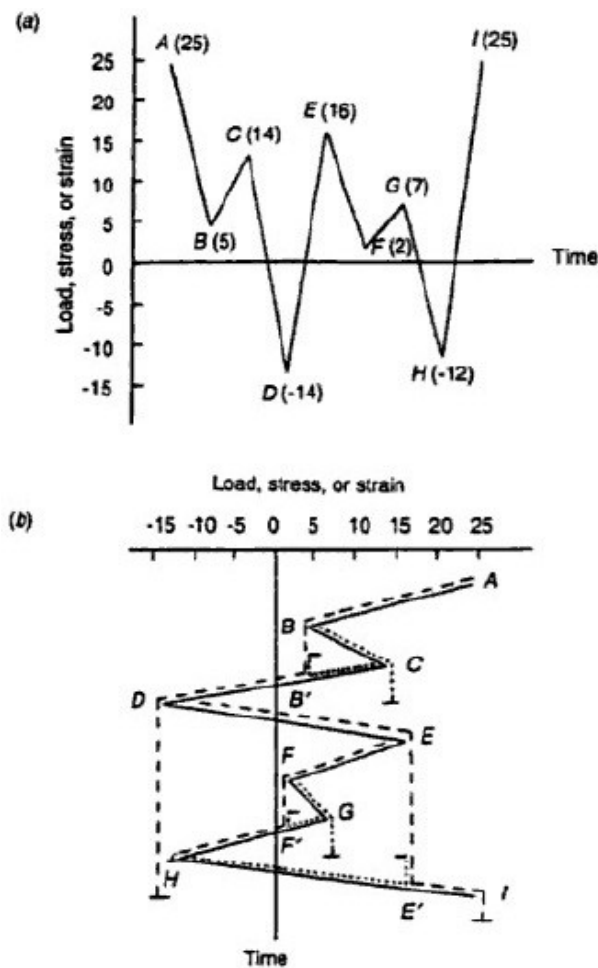


Figura 15: Exemplo de aplicação do método rainflow [15].

2.4.2 Fadiga Multiaxial

Tradicionalmente muitos critérios costumam considerar apenas tensões uniaxiais para a estimativa de vida em fadiga através das curvas S-N, como mostrado na seção anterior. Na fadiga multiaxial, a presença de esforços cíclicos combinados estabelece um estado de tensões complexo que não é bem descrito pelas uniaxiais.

Nas últimas décadas diversos autores propuseram diferentes critérios de fadiga para o caso de tensões multiaxiais, tais como Sines, Crossland, Findley, Brown e Miller. Apesar da variedade, ainda não existe uma metodologia mundialmente aceita, de tal forma que cabe ao engenheiro do projeto avaliar a melhor forma de avaliação do limite de fadiga de uma determinada peça em função das características do problema [10].

A fadiga multiaxial é estudada quando os carregamentos geram tensões de mesma natureza e em direções diferentes, ou quando geram tensões de naturezas distintas. No caso geral, esses carregamentos podem ser de flexão, torção, axial, cisalhante, de pressão interna, que quando combinados, geram tensões bi ou triaxiais.

Em fadiga multiaxial é extremamente importante determinar se os carregamentos combinados atuantes sobre a peça são proporcionais ou não proporcionais. Essa definição se baseia em função da direção do plano principal para uma determinada condição, que é aquele onde ocorre a máxima tensão principal. Para o estado plano de tensão, sua direção principal θ_p é calculada pela Equação 151.

$$\theta_p = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right) \quad (151)$$

Onde

A verificação da direção principal pode ser realizada com o auxílio do círculo de Mohr. A Figura 16 mostra um círculo de Mohr no qual a direção do plano das tensões ϕ_p está ilustrada. A ideia é verificar em qual direção ϕ_p o estado de tensão é crítico, dando origem à direção principal.

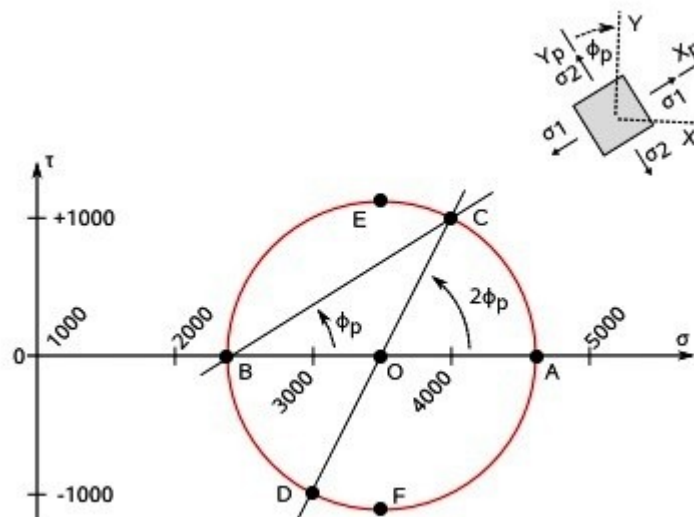


Figura 16: Círculo de Mohr e a direção principal [11].

Os carregamentos proporcionais, CP, caracterizam-se pelo fato de não alterarem a direção principal do plano crítico, enquanto que os carregamentos não proporcionais, CNP, alteram essa direção, ambos ao longo do tempo. Em função do tipo do carregamento, diferentes teorias de fadiga multiaxial podem ser utilizadas para verificar a resistência e a vida à fadiga do material. As Figuras 17 e 18 associam esses carregamentos com o estado de tensão e com a direção da tensão principal.

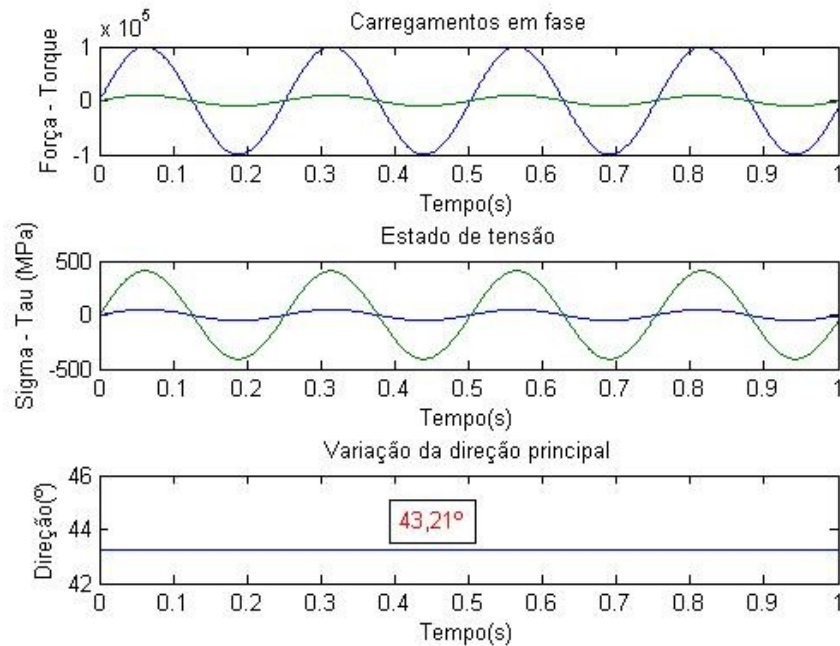


Figura 17: CP sem defasagem. Força axial (verde) e momento torçor (azul).

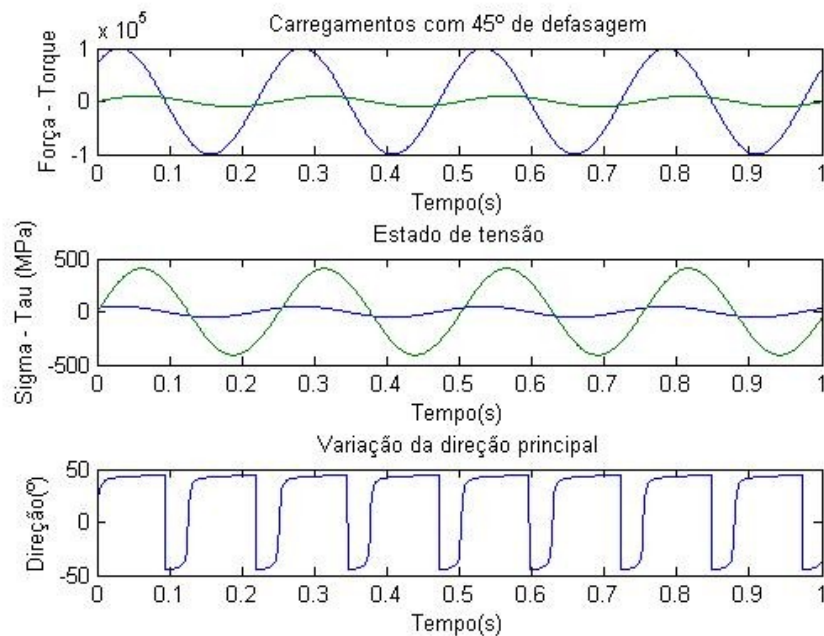


Figura 18: CNP com 45 graus de defasagem. Força axial (verde) e momento torçor (azul).

A Figura 17 mostra que quando os carregamentos são proporcionais, a direção da tensão principal não varia ao longo do tempo. Para o caso particular apresentado na Figura 17, $\theta_p = 43,21^\circ = \text{constante}$. Já a Figura 18 mostra que a defasagem de 45° entre a força axial e o momento torçor caracteriza um caso de carregamentos não proporcionais, pois a direção da tensão principal varia ao longo do tempo, $\theta_p = f(\text{tempo})$.

O comportamento das deformações também é capaz de diferenciar um CP de um CNP. A relação entre $\varepsilon \times \gamma / \sqrt{3}$ para um carregamento proporcional tende a se comportar como uma reta, enquanto que para o carregamento não proporcional esse comportamento pode assumir diferentes formas, como uma circunferência, por exemplo [14]. A Figura 19 mostra vários exemplos dessas relações, onde apenas os casos 0 e 5 são carregamentos proporcionais.

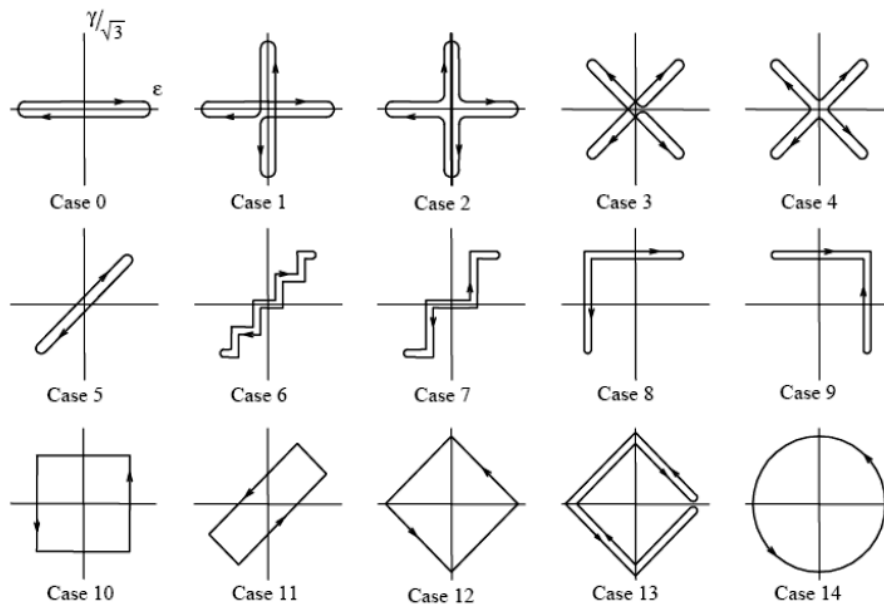


Figura 19: História das deformações para CP e CNP [14].

2.4.3 Modelos de Fadiga Multiaxial

Desde meados do século passado diversos pesquisadores vêm desenvolvendo estudos na área de fadiga multiaxial segundo diferentes abordagens, a fim de estimar a vida de componentes mecânicos.

Atualmente a dedução de critérios para análise de fadiga multiaxial pode ser classificada em quatro diferentes modelos: os modelos baseados em tensão, deformação,

energia e na mecânica da fratura. Dentro de cada modelo existem diversos critérios desenvolvidos por diferentes pesquisadores da área. Nas próximas seções serão mostrados os critérios mais utilizados em cada modelo [10].

2.4.3.1 Modelos Baseados em Tensão

Os primeiros modelos do comportamento da fadiga multiaxial foram baseados em análises elásticas das tensões combinadas, principalmente para os casos de torção e flexão. Esses modelos são aplicados com sucesso para fadiga de alto ciclo e para regimes de vida finita quando as deformações plásticas são pequenas [12]. Existem diversos modelos baseados em tensão, mas apenas dois serão apresentados a seguir.

2.4.3.1.1 Modelo de Sines

Sines propôs um critério de falha sob tensões multiaxiais proporcionais, supondo que o dano por fadiga é causado pela tensão de cisalhamento octaédrica de von Mises e pela componente hidrostática das tensões médias [14]. Seu sentido físico representa um efeito médio do deslizamento dos grãos em diferentes planos e direções dentro da microestrutura do material, com o deslizamento dentro de cada grão provocado pela tensão de cisalhamento octaédrica atuante nele [12].

Ele concluiu que a tensão média devido à torção não afeta o limite de fadiga em flexão até que o limite de escoamento torcional seja excedido por, pelo menos, 50%. Além disso, concluiu que a tensão média hidrostática, $\overline{\sigma}_h$, afeta o limite de fadiga [12]. Seu critério de falha resultante de todas as suas análises está representado pela Equação 152 [12].

$$\frac{\Delta\tau_{oct}}{2} + \alpha_{Sines}(3\overline{\sigma}_h) = \beta_{Sines} \quad (152)$$

A Equação 152 pode ser desenvolvida em termos de todas as possíveis componentes de tensão normal e de cisalhamento, conforme a Equação 153 [12].

$$\frac{1}{6}\sqrt{(\Delta\sigma_x - \Delta\sigma_y)^2 + (\Delta\sigma_x - \Delta\sigma_z)^2 + (\Delta\sigma_y - \Delta\sigma_z)^2 + 6(\Delta\tau_{xy}^2 + \Delta\tau_{xz}^2 + \Delta\tau_{yz}^2)} + \alpha_{Sines}(\sigma_x^m + \sigma_y^m + \sigma_z^m) = \beta_{Sines} \quad (153)$$

A formulação de Sines, Equação 152, tem a vantagem de ser facilmente aplicada para estados complexos de tensão. Além disso, a partir de simples testes de fadiga, as constantes α_{Sines} e β_{Sines} podem ser calculadas com a utilização das Equações 154 e 155 [14].

$$\alpha_{Sines} = \frac{\sqrt{2}}{3} \left(\frac{S_L}{S_{LP}} - 1 \right) \quad (154)$$

$$\beta_{Sines} = \frac{\sqrt{2}}{3} (S_L) \quad (155)$$

O parâmetro S_L é o limite de fadiga do material sob tensões totalmente alternadas. Seu valor pode ser obtido através de ensaios de fadiga tração-compressão, por exemplo. No entanto, ele pode ser estimado através da Equação 156, a equação de Basquin [15].

$$S_L = \sigma_f' (2N_f)^b \quad (156)$$

Onde σ_f' e b são constantes que dependem do material e N_f é o número de ciclos.

O parâmetro S_{LP} é o limite de fadiga do material sob tensões pulsativas. Seu valor também pode ser estimado pela Equação 157.

$$S_{LP} = \frac{1}{\left(\frac{1}{S_L} + \frac{1}{S_{ut}} \right)} \quad (157)$$

A equação de Basquin também pode ser utilizada para estimar a curva S-N de um material. O critério de Sines é valido somente para o caso de carregamentos proporcionais.

2.4.3.1.2 Modelo de Findley

Findley sugeriu que a tensão normal ao plano de cisalhamento tem uma relação linear com a amplitude de tensão de cisalhamento nesse plano. Para ele, a trinca nasce por fadiga no plano crítico do ponto crítico da peça, no qual o dano é máximo. Sendo assim, é importante identificar qual é o plano mais solicitado do ponto crítico da peça, orientado por um ângulo θ [12]. A Equação 158 mostra o critério definido por Findley [12]:

$$\left[\frac{\Delta\tau(\theta)}{2} + \alpha_{Findley} \cdot \sigma(\theta) \right]_{m\acute{a}x} = \beta_{Findley} \quad (158)$$

As constantes de Findley, $\alpha_{Findley}$ e $\beta_{Findley}$, são determinadas a partir de dois ensaios de fadiga, um para tensões normais e outro para tensões de cisalhamento, ambas totalmente alternadas. As Equações 159 e 160 determinam os valores dessas constantes,

conhecidos os limites de fadiga do material sob tensões normais, σ_{-1} , e sob tensões de cisalhamento, τ_{-1} [13].

$$\beta_{Findley} = \frac{1 - k/2}{\sqrt{k - 1}} \quad (159)$$

$$\alpha_{Findley} = \frac{\sigma_{-1}}{2\sqrt{k - 1}} \quad (160)$$

O parâmetro k é definido pela razão: $k = \frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}}$.

A Tabela 1 lista para alguns materiais, os valores das constantes de Findley calculados com os dados obtidos na referência [13].

Tabela 1: Constantes de Findley para alguns materiais.

Material	S_y (MPa)	S_{ut} (MPa)	k	$\alpha_{Findley}$	β_{Sines} (MPa)
Hard Steel	392	680	1,6020	0,2564	202,34
Mild Steel	222	680	1,7153	0,1683	138,93
C20 Steel	350	520	1,7849	0,1214	187,36
EN-GJS800-2	462	795	1,3364	0,5721	253,46
39NiCrMo3	625	856	1,3868	0,4930	295,45
25CrMo4a	660	780	1,4912	0,3630	242,55
SAE 4340	950	1020	1,4444	0,4167	438,75
34Cr4a	700	858	1,6023	0,2562	267,37
3.5%NiCra	747	881	1,5376	0,3154	362,80
3.5%NiCrb	747	881	1,6399	0,2251	318,78
C10 Steel	252	431	1,7815	0,1236	152,15
C40 normalised	335	649	1,5556	0,2981	216,00
C40 spheroidised	283	477	1,7628	0,1358	157,43
3/3.5% Ni steel	577	723	1,6667	0,2041	272,51
CrVa steel	670	752	1,6628	0,2071	263,47
Duralumin	303	433	1,5600	0,2940	104,23

O critério de Findley é válido tanto para carregamentos proporcionais quanto para não proporcionais. Para carregamentos proporcionais, por exemplo, cujo estado de tensão gerado possui amplitude variável, o critério de Findley varia a cada i -ésimo evento de carga. A Figura 20 mostra um exemplo de estado de tensão no qual as amplitudes das tensões normais e de cisalhamento variam com o número de ciclos.

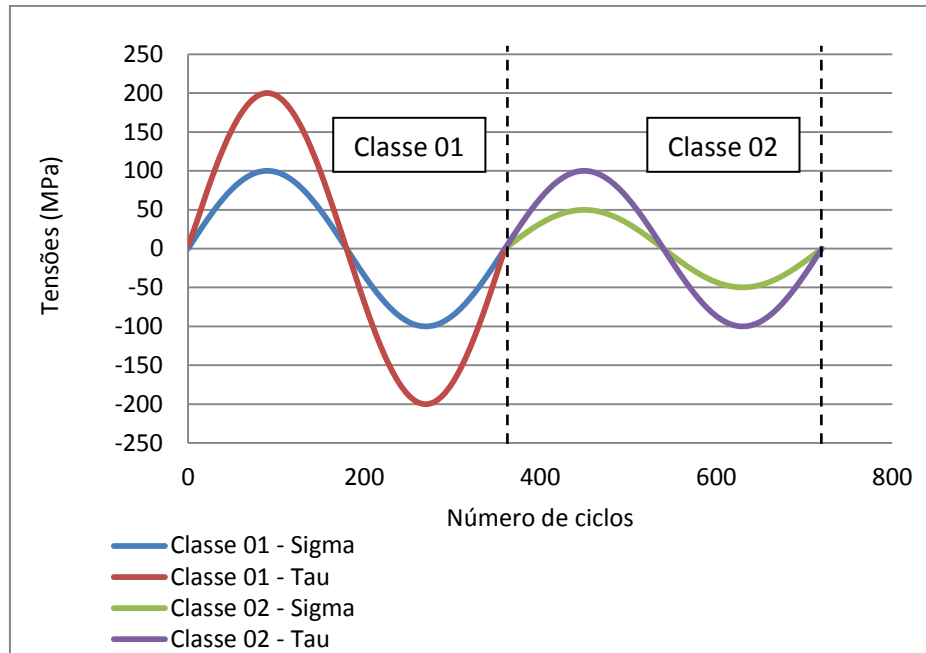


Figura 20: Exemplo de um estado de tensão com amplitude variável ao longo do tempo.

Para resolver o problema de fadiga multiaxial para a condição apresentada pela Figura 20, deve-se estudar cada classe de carregamento, quantificando o dano associado a cada uma através da Equação 150.

Para o cálculo do parâmetro N_i , deve-se saber o comportamento da curva S-N do material, que pode ser aproximada pela Equação 143 ou 156, e entrar com o máximo valor de $\frac{\Delta\tau(\theta)}{2} + \alpha_{Findley} \cdot \sigma(\theta)$. Já o número de ciclos atuantes em cada classe de carregamento, parâmetro n_i , é retirado diretamente do gráfico do estado de tensão. Todo esse passo a passo também é aplicável para o caso de carregamentos não proporcionais com amplitudes variáveis.

2.4.3.2 Modelos baseados em deformação

Alguns modelos baseados no estado de deformação são parecidos com os modelos de tensão, porém sua utilização tem melhor eficácia em problemas de fadiga de baixo ciclo. Esses modelos vêm cobrir uma deficiência dos modelos de tensão em descrever adequadamente dados experimentais na região de baixo ciclo [10].

Os modelos baseados em deformação consideram que a deformação cisalhante é a principal responsável pelo fenômeno de fadiga na região de vida finita. Tal deformação responde quase que exclusivamente pela nucleação de microtrincas [11]. Modelos como o de

Brown e Miller, Fatemi-Socie, são alguns exemplos que utilizam as deformações como critério de falha para fadiga de baixo ciclo.

2.4.3.3 Modelos baseados em energia

O conceito de energia na análise de fadiga multiaxial inclui explicitamente a consideração da resposta de tensão e deformação. Esse método pode ser aplicado em casos de carregamentos não proporcionais e proporcionais. No entanto, como a energia é uma propriedade escalar, nenhum modelo baseado em energia é capaz de refletir os mecanismos de nucleação e crescimento de trincas em planos com direções específicas [10].

A maioria dos critérios de energia é baseada nos estudos realizados por Morrow. Modelos de Garud e Ellyin são exemplos de critérios que utilizam a energia como critério de solução de problemas de fadiga multiaxial [12].

2.4.3.4 Modelos baseados na mecânica da fratura

Microtrincas crescem, frequentemente, ligadas com outras microtrincas, formando uma única trinca dominante que se propaga até a fratura. Os métodos baseados em deformações e energia são utilizados para resolver esse tipo de problema. No entanto, quando se trata de trincas maiores sob fadiga multiaxial, esse problema é tratado segundo abordagens que visam obter a taxa de crescimento dessas trincas no regime de propagação estável [12].

Capítulo 3

Análises dinâmicas

O presente capítulo tem como principal objetivo desenvolver os modelos numéricos de um tubo metálico, com seção transversal circular e sujeito à vibração livre e forçada, a fim de se obter seu estado de tensões máximas ao longo do tempo.

Para o caso de vibração forçada, além do estudo considerar os forçamentos externos de carga axial, transversal e momento torçor, atuando separadamente, ele também propõe analisar as respostas dinâmicas quando esses forçamentos se apresentarem de forma combinada, gerando um estado de tensão multiaxial.

Para isso, as análises dinâmicas foram desenvolvidas através de uma modelagem numérica via *MEF*, baseada na metodologia teórica apresentada no Capítulo 2. Foi utilizado o programa *MATLAB*^R para o desenvolvimento e resolução das equações diferenciais que regem o fenômeno vibratório de cada caso. Como condição de contorno, considerou-se o tubo engastado em uma de suas extremidades, e como condições iniciais, considerou-se que todos os elementos do tubo estavam parados na sua posição de equilíbrio no instante inicial do problema, em $t = 0$.

3.1 Tubo Engastado com Forçamento Axial

O primeiro caso dinâmico estudado foi o de um tubo com a liberdade de vibrar apenas axialmente. Análises de vibração livre e forçada foram desenvolvidas para estudar seus efeitos no estado de tensão do elemento estrutural tubular. A Figura 21 mostra esse tubo e a Tabela 2 suas dimensões principais e as propriedades do material do qual ele é feito.

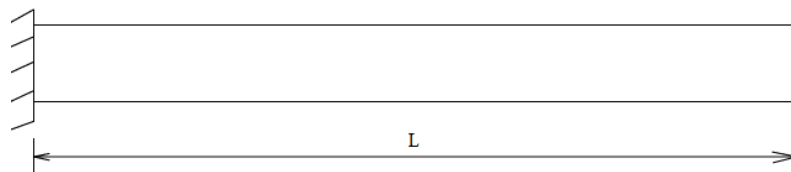
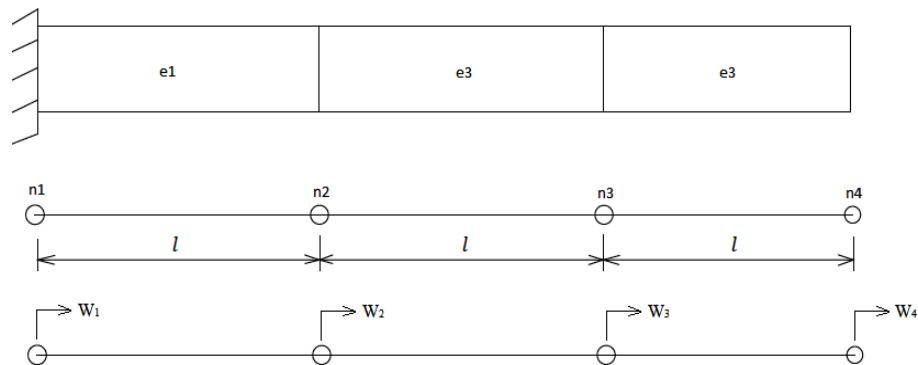


Figura 21: Tubo engastado.

Tabela 2: Propriedades geométricas e do material do tubo.

Dados Geométricos (mm)		Propriedades do material	
L	1200	ρ	7800 Kg.m ⁻³
D_ext	100	E	207 GPa
e	1	S _y	252 MPa

No **APÊNDICE A**, encontra-se o programa desenvolvido para resolver o problema dinâmico desse tubo engastado. Basicamente o tubo foi dividido em três elementos finitos com o mesmo comprimento l . Cada nó recebeu um grau de liberdade de deslocamento axial. No caso do nó que está engastado, seu grau de liberdade é considerado nulo. O amortecimento foi desconsiderado, dado que sua influência é preponderante apenas em casos de ressonância. A Figura 22 mostra o tubo dividido em elementos finitos, bem como seus graus de liberdade.

**Figura 22:** Divisão do tubo em elementos finitos.

Para o caso de vibração livre, as seguintes frequências naturais, em Hz, e os modos normais de vibração foram encontrados:

$$[\omega]_{axial} = \begin{bmatrix} 1085,5 & 0 & 0 \\ 0 & 3550,2 & 0 \\ 0 & 0 & 6440,7 \end{bmatrix}$$

$$[X]_{axial} = \begin{bmatrix} 0,4240 & -1,0151 & 0,6741 \\ 0,7344 & 0,0 & -1,1675 \\ 0,8480 & 1,0151 & 1,3482 \end{bmatrix}$$

Os modos de vibração $[X]_{axial} = [X_1 \ X_2 \ X_3]$ representam vetores com as proporções dos deslocamentos de cada grau de liberdade. A Figura 23 ilustra esses modos de vibração, chamando de ZT as zonas tracionadas e de ZC as zonas comprimidas.

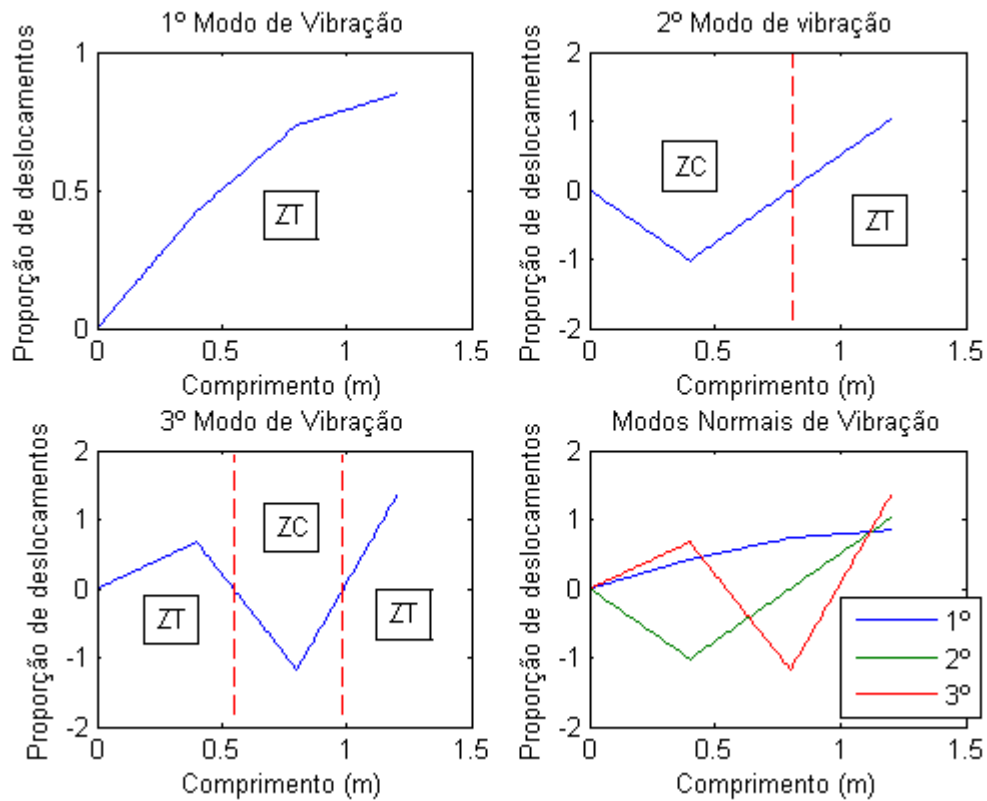


Figura 23: Modos normais de vibração do tubo.

A Figura 23 mostra que dependendo do modo de vibração, partes do tubo podem estar sujeitas à compressão, ZC, e outras à tração, ZT. O 1º modo, por exemplo, faz com que todo o tubo esteja submetido à tração, o que já não acontece no terceiro.

Para o caso de vibração forçada, considerou-se que o tubo estava sujeito a um forçamento axial externo do tipo $F = F_0 \sin(\omega_{fa} t)$, onde $F_0 = 10 \text{ KN}$ é a amplitude e $\omega_{fa} = 200 \text{ rad/s}$ é a frequência de forçamento axial. O referido forçamento foi aplicado no quarto nó. Nota-se que a frequência de forçamento é muito inferior à menor das frequências naturais de vibração, como mostra a matriz $[\omega]_{axial}$, indicando que o tubo não tenderá a entrar em ressonância. A Figura 24 mostra esse forçamento sobre o tubo.

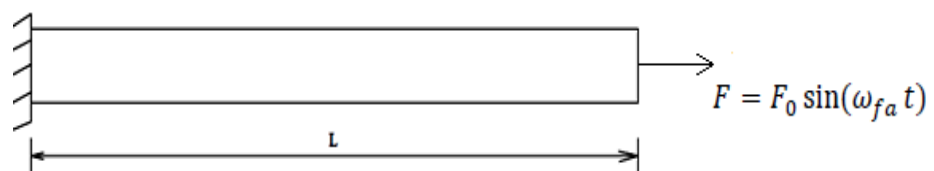


Figura 24: Forçamento Axial.

Para o caso de vibração axial sem amortecimento, o estado de tensão ao longo do tempo foi calculado nas seções dos nós 2, 3 e 4 do tubo. Sabe-se que um carregamento axial gera tensões normais trativas ou compressivas que se distribuem igualmente ao longo da seção transversal de um dado elemento, tornando-se necessário apenas encontrar qual é a seção crítica. No entanto, como o forçamento atua em todas as seções com a mesma intensidade, espera-se que o estado de tensão calculado em cada seção seja o mesmo. A Figura 25 mostra os estados de tensão calculados nas seções consideradas.

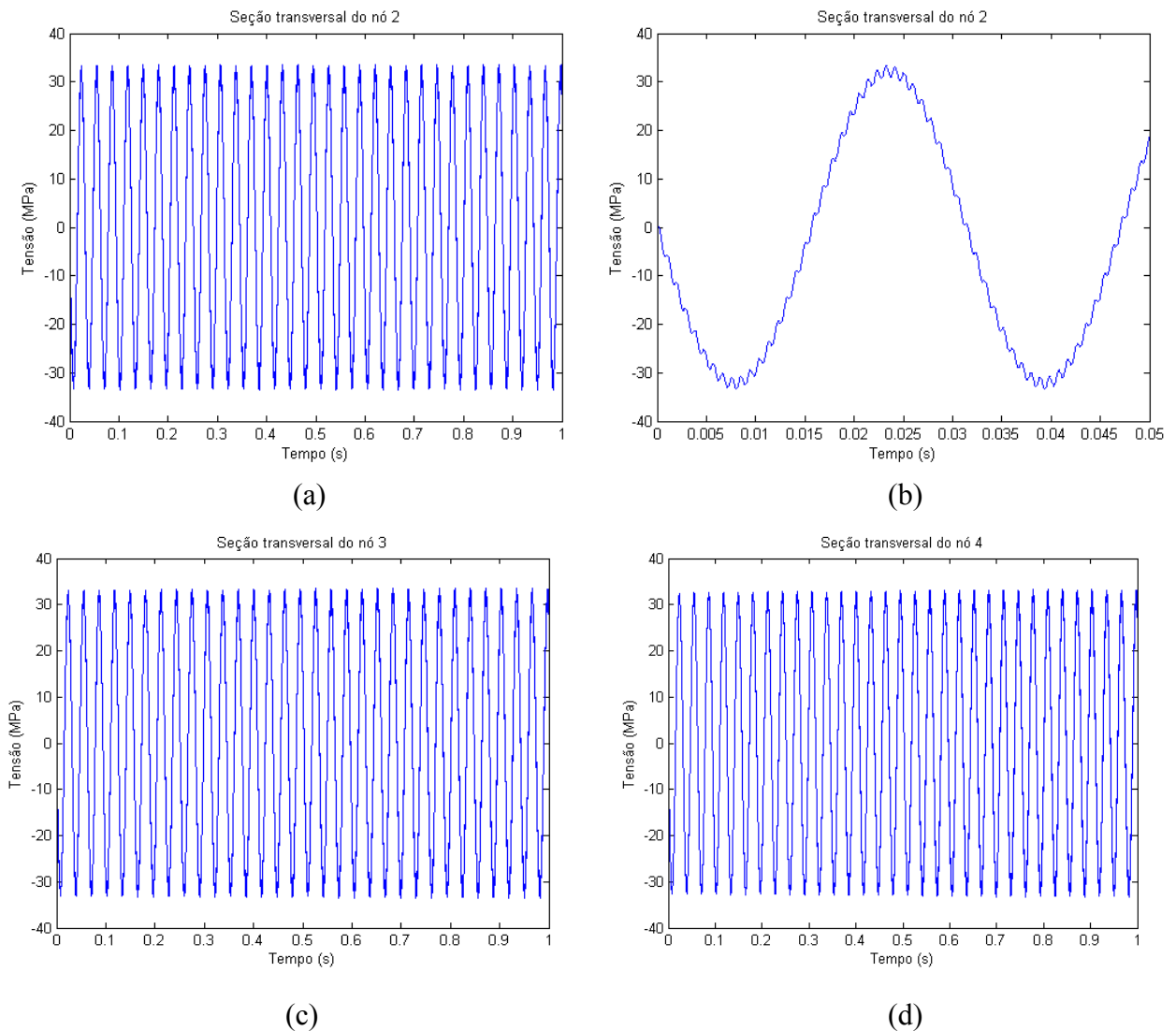


Figura 25: Tensões máximas ao longo do tempo. (a) Seção do nó 2; (b) Ampliação; (c) Seção do nó 3; (d) Seção do nó 4.

Conforme mostrado na Figura 25, as tensões geradas são totalmente alternadas, ou seja, possuem média nula uma vez que as tensões máximas e mínimas são iguais. Qualquer

ponto de uma dada seção transversal está submetido ora à tensão trativa, ora à tensão compressiva. Além disso, os resultados provam que todas as seções ao longo do tubo estão submetidas ao mesmo estado de tensão.

O estado de tensão ao longo do tempo assume um comportamento harmônico muito parecido com o do forçamento. Muito parecido porque, se a curva for ampliada em um dado ponto, será notado que a resposta não é um harmônico perfeito, como mostra a Figura 25(b). A ampliação mostra que durante um ciclo completo existem pequenas variações de amplitude de tensão. Esse fenômeno pode estar relacionado ao efeito da inércia do tubo, que geralmente é desprezado nas análises de fadiga.

3.2 Tubo Engastado com Forçamento Torçor

O segundo caso estudado considerou o mesmo tubo, com as mesmas propriedades, exceto que dessa vez, seus elementos estão sujeitos a vibrar apenas em torno do seu eixo longitudinal. Tanto a vibração livre quanto a forçada foram estudadas. O programa utilizado para as análises encontra-se no **APÊNDICE B**.

O tubo foi dividido em três elementos finitos com o mesmo comprimento l . Cada nó recebeu um grau de liberdade de rotação em torno do seu eixo longitudinal. No caso do nó que está engastado, seu grau de liberdade é considerado nulo. As análises foram desenvolvidas desconsiderando o amortecimento do tubo. A Figura 26 mostra os graus de liberdade dos nós de cada elemento finito.



Figura 26: Graus de liberdade dos nós.

Para o caso de vibração livre, as seguintes frequências naturais, em Hz, e os modos de vibração foram encontrados:

$$[\omega]_{torção} = \begin{bmatrix} 631,3 & 0 & 0 \\ 0 & 2064,5 & 0 \\ 0 & 0 & 3745,4 \end{bmatrix}$$

$$[X]_{torção} = \begin{bmatrix} 8,5654 & -20,5070 & 13,6171 \\ 14,8357 & 0,0 & -23,5856 \\ 17,1308 & 20,5070 & 27,2343 \end{bmatrix}$$

A Figura 27 ilustra os modos de vibração, $[X]_{torção}$, chamando de ZTSH as zonas torcidas no sentido horário e de ZTSA as torcidas no sentido anti-horário.

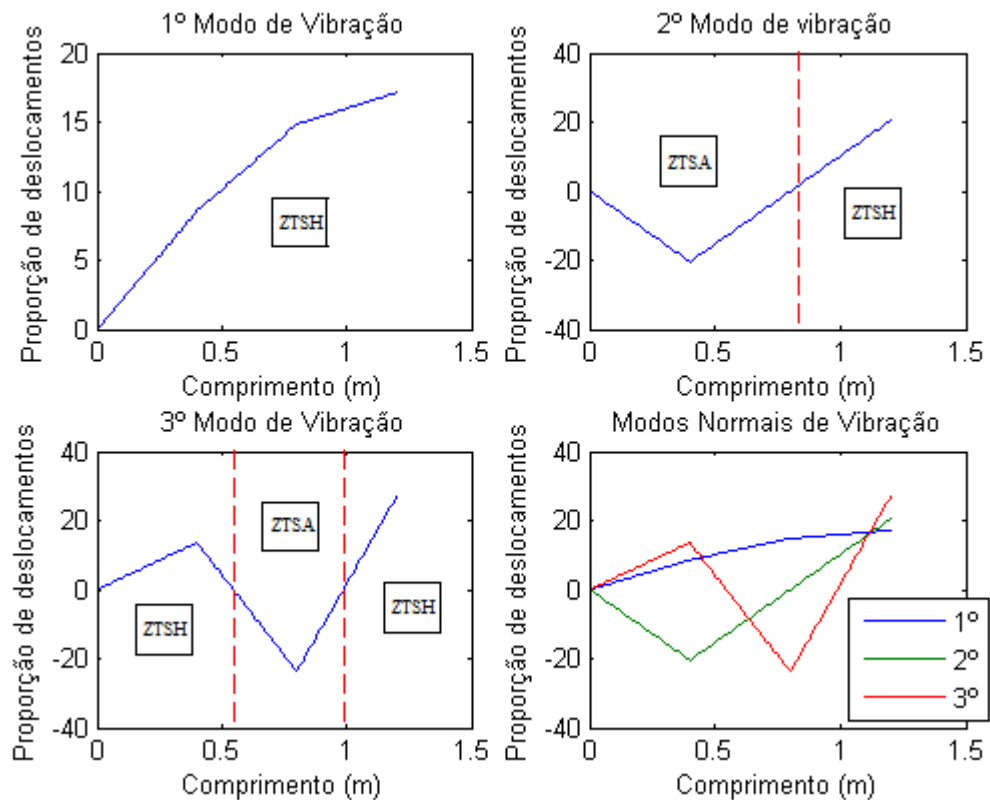


Figura 27: Modos normais de vibração do tubo.

A Figura 27 mostra que em função do modo de vibração do tubo, algumas partes podem estar sendo torcidas em um sentido e outras noutro. O 1º modo, por exemplo, mostra todas as seções do tubo sendo torcidas no sentido horário, enquanto que o 2º, uma parte do tubo torce no sentido horário e a outra no anti-horário.

Para o caso de vibração forçada, considerou-se que o tubo estava sujeito a um momento torçor do tipo $T = T_0 \sin(\omega_{ft} t)$, onde $T_0 = 500 Nm$ é a amplitude e $\omega_{ft} = 200 rad/s$ é a frequência de forçamento torçor. O referido forçamento foi aplicado no quarto nó. Nota-se que a frequência de forçamento está distante da menor das frequências naturais de vibração, como mostra a matriz $[\omega]_{torção}$, indicando que o tubo não entrará em ressonância. A Figura 28 mostra esse forçamento sobre o tubo.

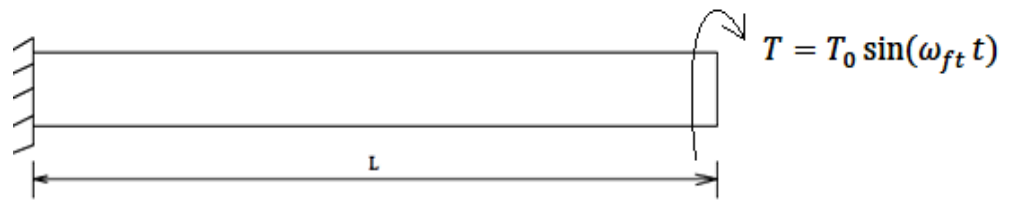


Figura 28: Forçamento torçor.

Para o caso de vibração torcional sem amortecimento, o estado de tensão ao longo do tempo foi calculado nas seções dos nós 2, 3 e 4 do tubo. Sabe-se que um carregamento torçor gera tensões de cisalhamento que podem atuar nos dois sentidos de rotação, além de seguir uma distribuição linear ao longo da seção transversal, sendo sempre máxima na extremidade.

Dessa forma, todas as análises foram feitas para um ponto localizado na extremidade da seção transversal do tubo. A Figura 29 mostra os estados de tensão calculados nas seções consideradas.

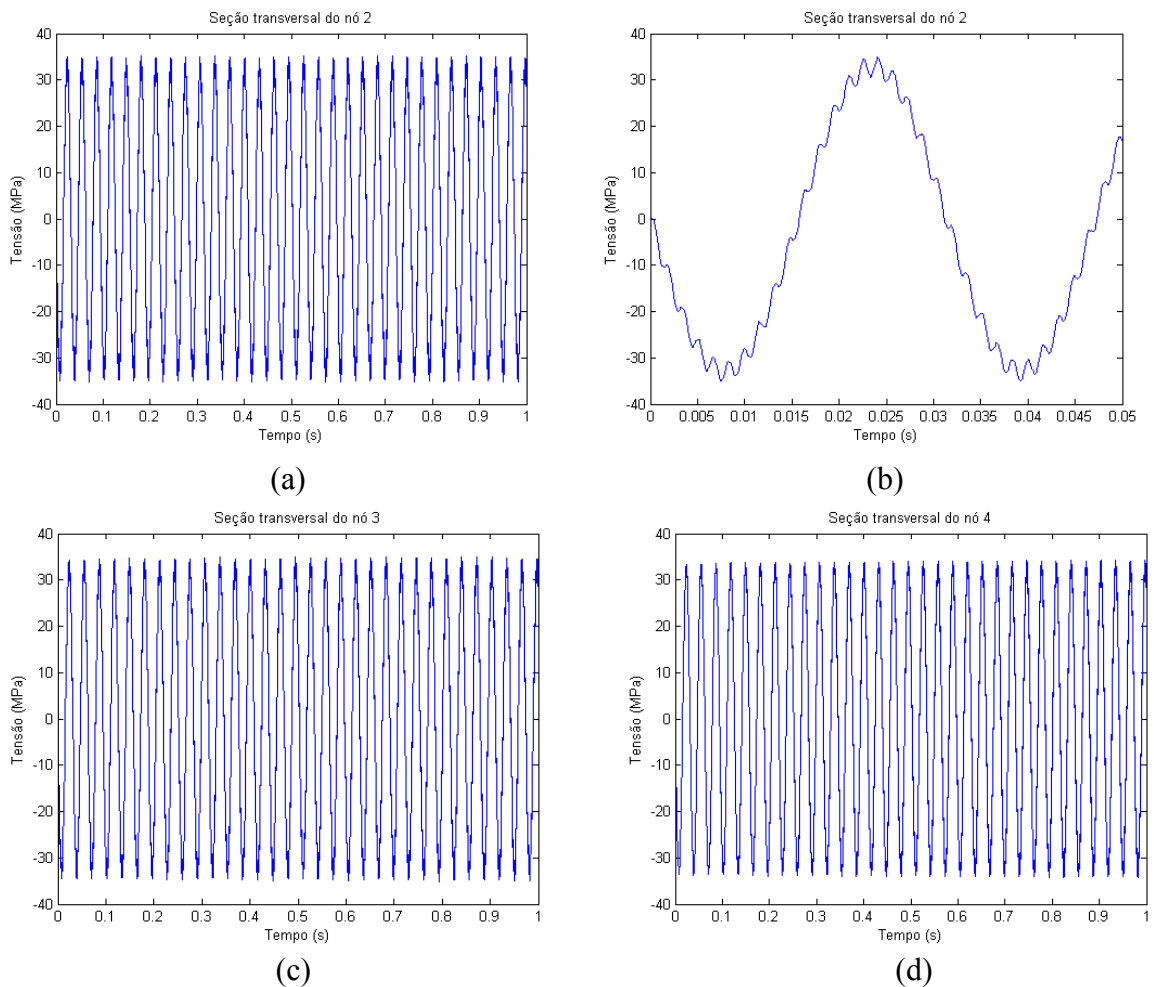


Figura 29: Tensões máximas ao longo do tempo. (a) Seção do nó 2; (b) Ampliação; (c) Seção do nó 3; (d) Seção do nó 4.

Para esse tipo de forçamento, o estado de tensão nas três seções é o mesmo, como já era de ser esperado, pois o momento torçor é igual ao longo de todo o tubo. Além disso, o comportamento é muito parecido com o mostrado para o carregamento axial, ou seja, as tensões são totalmente alternadas. Isso mostra que hora a seção transversal está submetida a uma tensão de cisalhamento que tende a cortar o tubo em um sentido, hora noutro.

A resposta dinâmica também possui um comportamento muito parecido com a função forçamento. No entanto, ampliando o gráfico da tensão de cisalhamento máxima da seção do nó dois, nota-se que a resposta não é uma função harmônica perfeita, como mostra a Figura 29(b).

Esse tipo de comportamento não está previsto nas análises convencionais de fadiga uniaxial, pois não se considera a inércia do corpo em estudo. Em função disso, torna-se necessário avaliar cada pequeno ciclo de carregamento, uma vez que esse tipo de carregamento pode danificar a estrutura com relação à sua vida em fadiga.

3.3 Tubo Engastado com Forçamento Transversal

Para a terceira análise, o mesmo tubo foi utilizado. As mesmas propriedades foram consideradas, exceto que agora, os elementos podem vibrar apenas transversalmente e em torno do eixo perpendicular ao plano do papel, caracterizando uma vibração por flexão. Tanto a vibração livre quanto a forçada foram estudadas. O programa utilizado para as análises encontra-se no **APÊNDICE C**.

O tubo foi dividido em três elementos finitos com o mesmo comprimento l . Cada nó recebeu dois graus de liberdade, sendo um de deslocamento transversal e outro de rotação em torno do eixo perpendicular ao plano do papel. No caso do nó que está engastado, seus graus de liberdade são nulos. As análises foram desenvolvidas desconsiderando o amortecimento do tubo. A Figura 30 mostra os graus de liberdade dos nós de cada elemento finito.



Figura 30: Graus de liberdade dos nós.

Para o caso de vibração livre, as seguintes frequências naturais, em Hz, e os modos de vibração foram encontrados:

$$[\omega]_{flexão} = \begin{bmatrix} 70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 441 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1245 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2804 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5276 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10519 \end{bmatrix}$$

$$[X]_{flexão} = \begin{bmatrix} 0,1941 & 0,6957 & -0,8764 & 0,3193 & -0,3616 & 0,3095 \\ 0,8837 & 1,7333 & 1,6313 & -10,1981 & -16,8370 & 7,9357 \\ 0,6413 & 0,4994 & 0,7728 & 0,1475 & 0,6370 & 0,4846 \\ 1,2789 & -2,9087 & 1,2452 & 10,4487 & -11,0747 & 22,3070 \\ 1,1724 & -1,1794 & -1,1778 & -1,2674 & 1,3696 & 2,5733 \\ 1,3449 & -4,7030 & -7,8020 & -13,5035 & 22,6984 & 64,3102 \end{bmatrix}$$

A Figura 31 ilustra, graficamente, os modos de vibração $[X]_{flexão}$ calculados para o tubo.

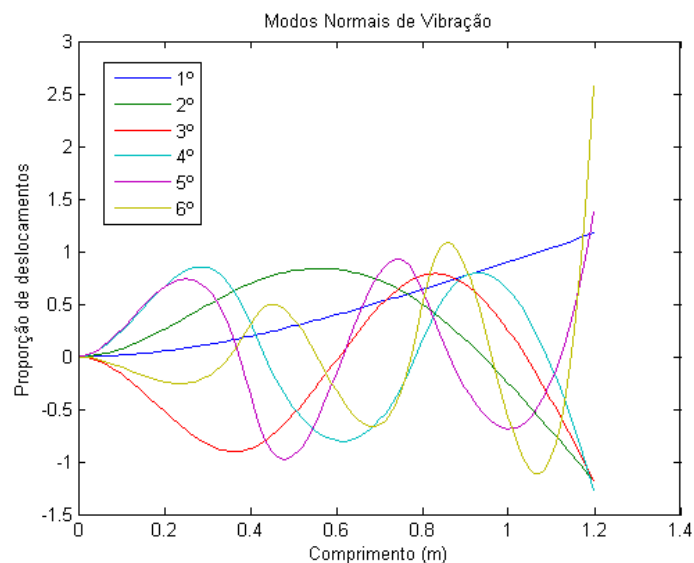


Figura 31: Modos normais de vibração do tubo.

A Figura 31 mostra que os possíveis modos normais de vibração do tubo são completamente diferentes. O 1º mostra o comportamento da linha elástica do tubo, previsto e analisado pela resistência dos materiais [6], enquanto que o 6º mostra um comportamento no qual o tubo possui flexões intensas localizadas em algumas regiões.

Para o caso de vibração forçada, considerou-se que o tubo estava sujeito a um forçamento transversal do tipo $Q = Q_0 \sin(\omega_{ff} t)$, onde $Q_0 = 1000 \text{ N}$ é a amplitude e $\omega_{ff} = 200 \text{ rad/s}$ a frequência de forçamento transversal. Tal forçamento foi aplicado no

quarto nó. A frequência de forçamento está distante das frequências naturais, impossibilitando que o tubo entre em ressonância. A Figura 32 mostra o forçamento sobre o tubo.

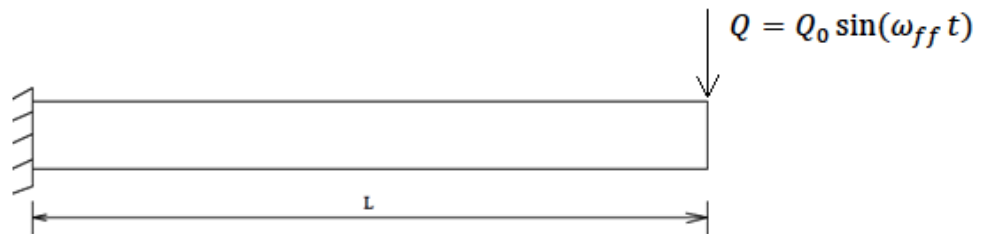
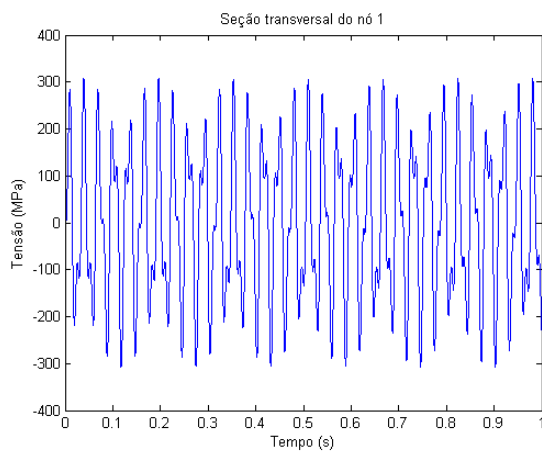


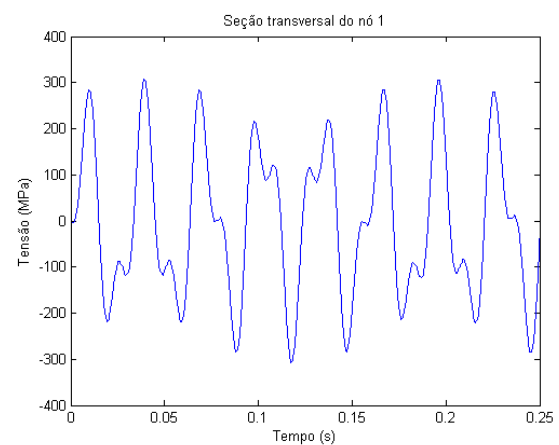
Figura 32: Forçamento transversal.

Para o caso de vibração forçada sem amortecimento, o estado de tensão ao longo do tempo foi calculado para as seções dos nós 1, 2 e 3 do tubo. Sabe-se que um carregamento transversal gera tensões de cisalhamento e de flexão, mas no caso de um tubo longo com comprimento maior do que dez vezes o seu diâmetro, apenas a tensão de flexão é considerada. O presente caso se enquadra nessa definição, pois $L/D_{ext} = 1200/100 = 12$.

Portanto, todas as análises foram feitas para um ponto localizado a uma distância máxima do centro da seção transversal do tubo, no qual ocorre a máxima tensão normal devido à flexão do tubo. A Figura 33 mostra os estados de tensão calculados nas seções consideradas.



(a)



(b)

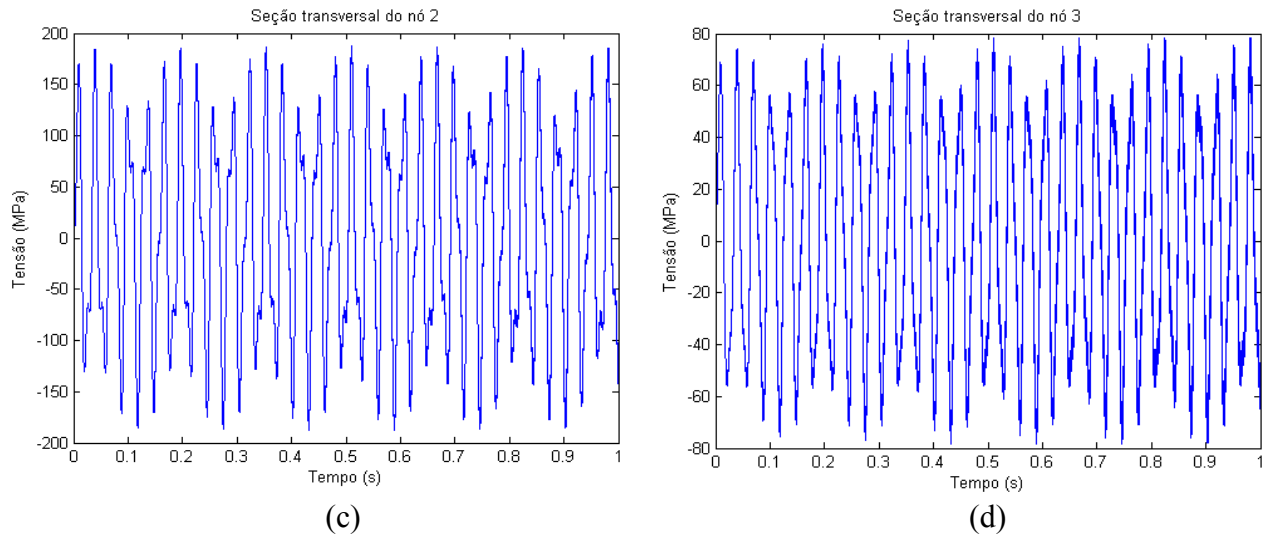


Figura 33: Tensões máximas ao longo do tempo. (a) Seção do nó 1; (b) Ampliação; (c) Seção do nó 2; (d) Seção do nó 3.

Para esse tipo de forçamento, o estado de tensão varia ao longo do comprimento do tubo, apresentando as máximas tensões no engaste, como mostra a Figura 33(a). Além disso, a resposta não é um harmônico perfeito, como é o forçamento, e gera tensões trativas e compressivas para um mesmo ponto de uma seção transversal.

3.4 Tubo Engastado com Forçamento Axial e Torçor

Para essa análise, considerou-se o mesmo tubo engastado. Tanto a vibração livre quanto a forçada foram estudadas. O programa utilizado para as análises encontra-se no **APÊNDICE D**.

O tubo foi dividido em três elementos finitos com o mesmo comprimento l . Cada nó recebeu dois graus de liberdade, sendo um de deslocamento axial e outro de rotação em torno do seu eixo longitudinal. No caso do nó que está engastado, seus graus de liberdade são nulos. As análises foram desenvolvidas desconsiderando o amortecimento do tubo. A Figura 34 mostra os graus de liberdade dos nós de cada elemento finito.



Figura 34: Graus de liberdade dos nós.

Para o caso de vibração livre, as seguintes frequências naturais, em Hz, foram encontradas:

$$[\omega]_{axial_torção} = \begin{bmatrix} 631,3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1085,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2064,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3550,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3745,4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6440,7 \end{bmatrix}$$

A matriz de frequências naturais $[\omega]_{axial_torção}$ é formada pelas frequências naturais devido aos graus de liberdade axial e torcional, separadamente. É possível notar que os elementos ω_{11} , ω_{33} e ω_{55} são as frequências naturais apresentadas pela matriz $[\omega]_{torção}$ e os elementos ω_{22} , ω_{44} e ω_{66} pela $[\omega]_{axial}$. O mesmo ocorre com os modos naturais de vibração.

Para o caso de vibração forçada, considerou-se que o tubo estava sujeito a um forçamento combinado, com uma força axial do tipo $F = F_0 \sin(\omega_{fa} t)$, com $F_0 = 10 \text{ KN}$ e $\omega_{fa} = 200 \text{ rad/s}$ e um momento torçor do tipo $T = T_0 \sin(\omega_{ft} t)$, com $T_0 = 500 \text{ Nm}$ e $\omega_{ft} = 200 \text{ rad/s}$. Os forçamentos foram aplicados no último nó. A Figura 35 mostra os forçamentos sobre o tubo.

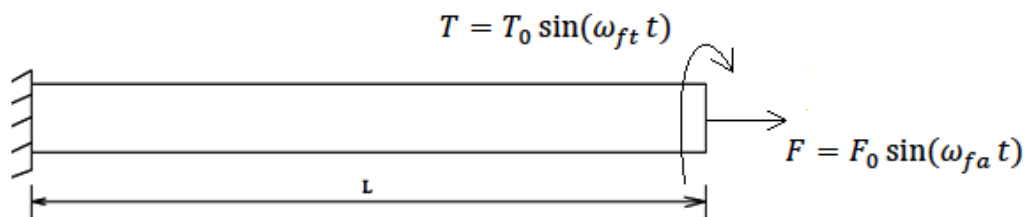
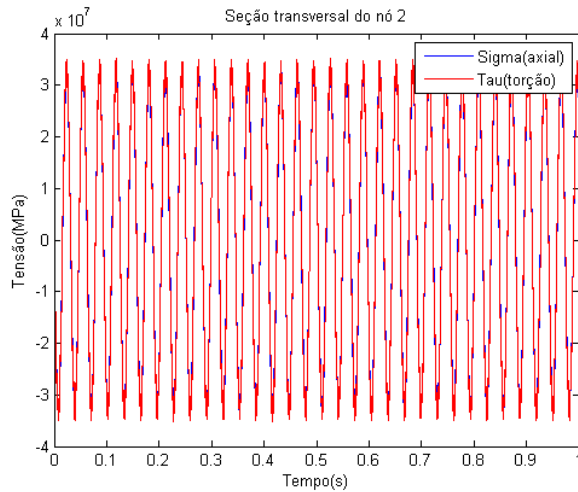
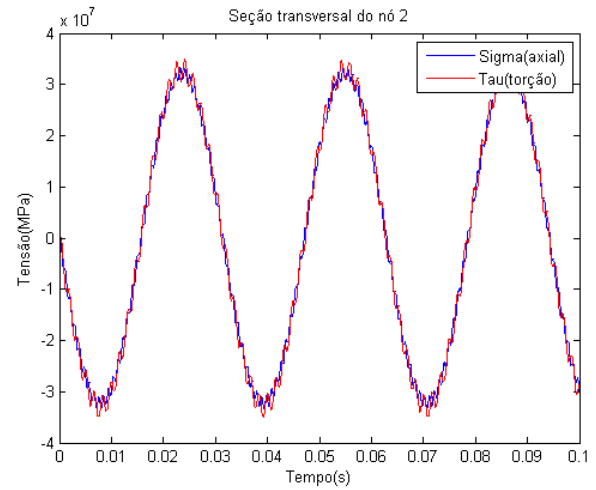


Figura 35: Forçamentos, axial e torçor.

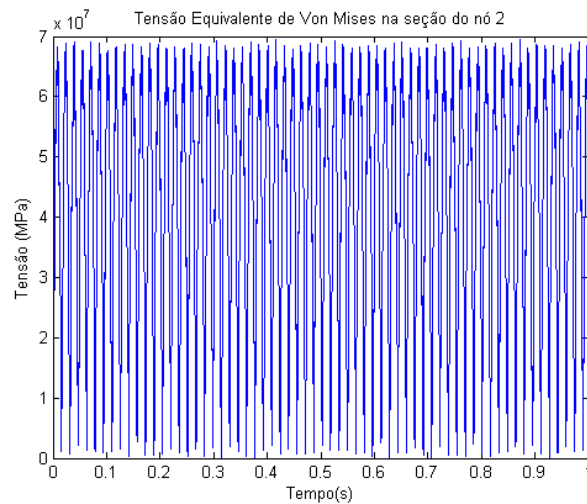
Como já foi visto na seção 3.1 e 3.2, o estado de tensão para esses tipos de forçamento é o mesmo ao longo de qualquer seção transversal do tubo. Sendo assim, calculou-se apenas o estado de tensão na seção do nó 2. A Figura 36 mostra os resultados obtidos.



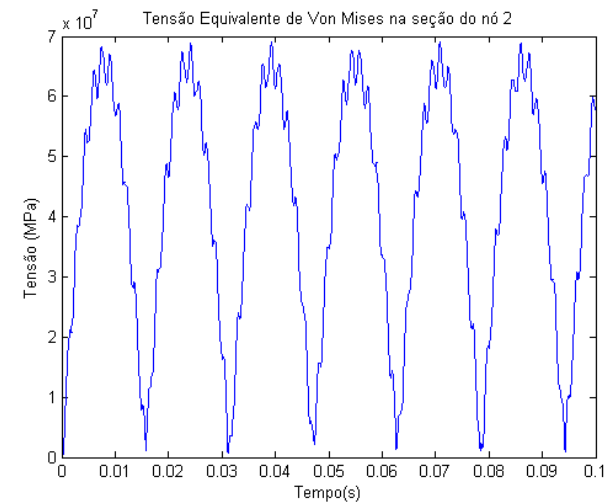
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 36: Tensões máximas ao longo do tempo na seção do nó 2. (a) Estado de tensão; (b) Ampliação; (c) Tensão equivalente de von Mises; (d) Ampliação.

A Figura 36(b) mostra que as tensões, normal e de cisalhamento, estão atuando em fase, ou seja, elas aumentam e diminuem sua intensidade da mesma forma. Isso pode ser visto melhor na Figura 36(d), que mostra a tensão equivalente de von Mises variando ao longo do tempo. Esse tipo de resposta caracteriza uma condição de carregamento proporcional.

3.5 Tubo Engastado com Forçamento Transversal e Torção

Para essa análise, considerou-se o mesmo tubo engastado. Tanto a vibração livre quanto a forçada foram estudadas. O programa utilizado para as análises encontra-se no **APÊNDICE E**.

O tubo foi dividido em três elementos finitos com o mesmo comprimento. Cada nó recebeu três graus de liberdade, sendo um de deslocamento transversal, outro de deslocamento angular em torno do eixo perpendicular ao plano do papel e outro de rotação em torno do seu eixo longitudinal. No caso do nó que está engastado, seus graus de liberdade são nulos. As análises foram desenvolvidas desconsiderando o amortecimento do tubo. A Figura 37 mostra os graus de liberdade dos nós de cada elemento finito.

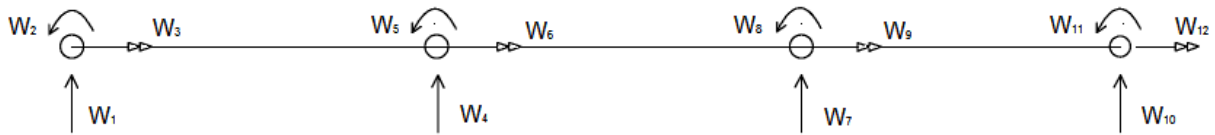


Figura 37: Graus de liberdade dos nós.

Para o caso de vibração livre, as seguintes frequências naturais, em Hz, foram encontradas:

$$[\omega]_{flexão_torção} = \begin{bmatrix} 70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 441 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 631 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1245 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2065 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2804 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3745 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5276 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10519 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz de frequências naturais $[\omega]_{flexão_torção}$ é formada pelas frequências naturais devido aos graus de liberdade de deslocamento transversal, angular e torcional, separadamente. É possível notar que os elementos ω_{33} , ω_{55} e ω_{77} são as frequências naturais apresentadas pela matriz $[\omega]_{torção}$ e os elementos ω_{11} , ω_{22} , ω_{44} , ω_{66} , ω_{88} e ω_{99} pela $[\omega]_{flexão}$. O mesmo ocorre com os modos normais de vibração.

Para o caso de vibração forçada, considerou-se que o tubo estava sujeito a um forçamento combinado, com uma força transversal do tipo $Q = Q_0 \sin(\omega_{ff} t)$, com $Q_0 =$

1000 N e $\omega_{ff} = 200 \text{ rad/s}$ e um torque do tipo $T = T_0 \sin(\omega_{ft} t)$, com $T_0 = 500 \text{ Nm}$ e $\omega_{ft} = 200 \text{ rad/s}$. Os forçamentos foram aplicados no último nó. A Figura 38 mostra os forçamentos sobre o tubo.

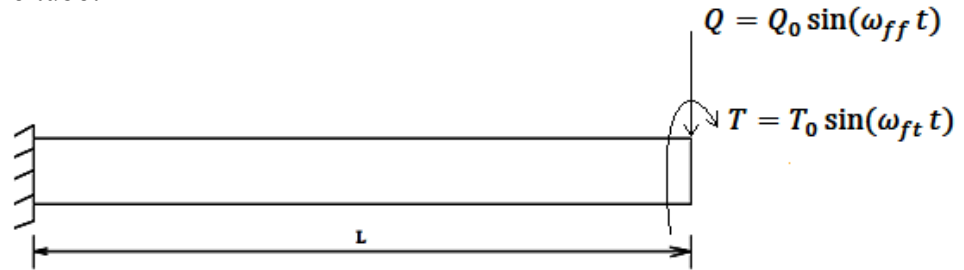


Figura 38: Forçamentos, transversal e torçor.

Como já foi visto na seção 3.2 e 3.3, o estado de tensão para o forçamento torçor é o mesmo ao longo de qualquer seção transversal do tubo e para o forçamento transversal, ele é crítico no engaste. Sendo assim, calculou-se apenas o estado de tensão na seção do nó 1. A Figura 39 mostra os resultados.

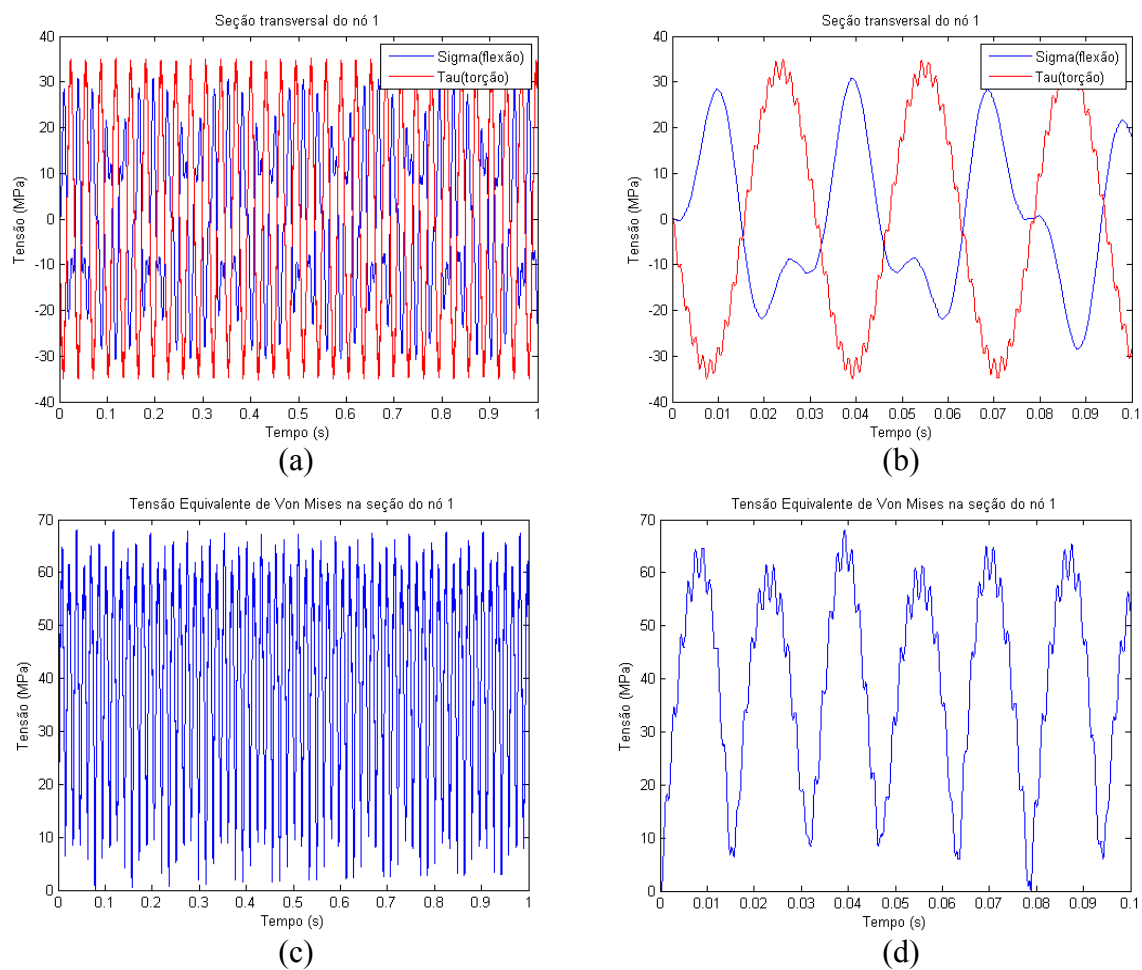


Figura 39: Tensões máximas ao longo do tempo na seção do nó 1; (a) Estado de tensão; (b) Ampliação; (c) Tensão equivalente de von Mises; (d) Ampliação.

A matriz de frequências naturais $[\omega]_{flexão_axial}$ é formada pelas frequências naturais devido aos graus de liberdade de deslocamento transversal, axial e angular, separadamente. É possível notar que os elementos ω_{33}, ω_{66} e ω_{88} são as frequências naturais apresentadas pela matriz $[\omega]_{axial}$ e os elementos $\omega_{11}, \omega_{22}, \omega_{44}, \omega_{55}, \omega_{77}$ e ω_{99} pela $[\omega]_{flexão}$. O mesmo acontece com os modos normais de vibração.

Para o caso de vibração forçada, considerou-se que a viga estava sujeita a um forçamento combinado, com uma força transversal do tipo $Q = Q_0 \sin(\omega_{ff} t)$, com $Q_0 = 1000\text{ N}$ e $\omega_{ff} = 200\text{ rad/s}$ e uma axial do tipo $F = F_0 \sin(\omega_{fa} t)$, com $F_0 = 10\text{ KN}$ e $\omega_{fa} = 200\text{ rad/s}$. Os forçamentos foram aplicados no último nó. A Figura 41 mostra os forçamentos sobre o tubo.

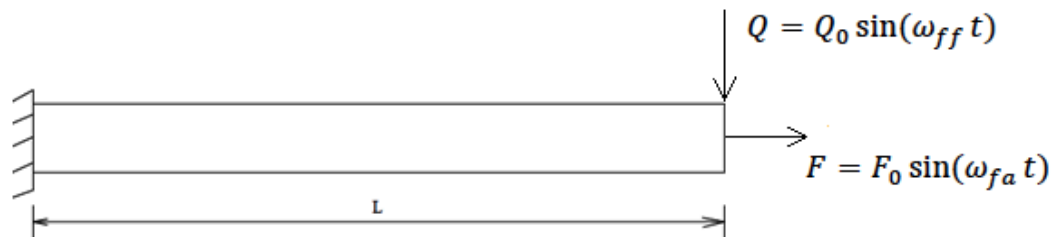
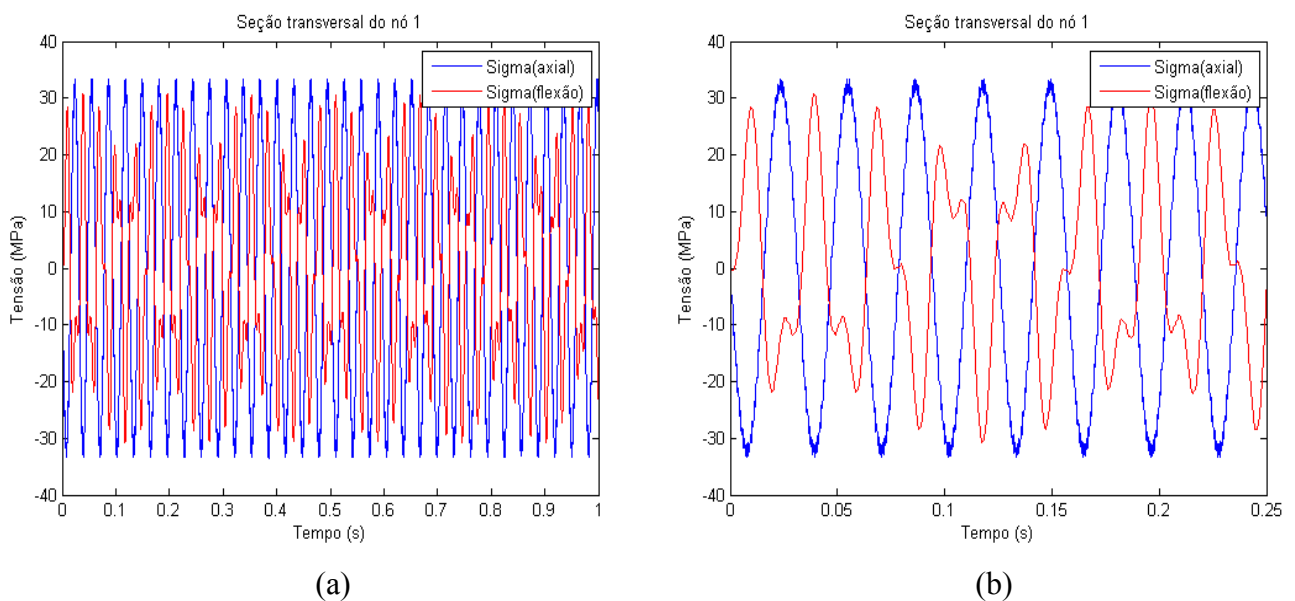


Figura 41: Forçamentos, transversal e axial.

O estado de tensão foi calculado apenas para a seção do nó 1, dado que nesta as tensões normais devido à flexão do tubo são máximas. A Figura 42 mostra os resultados obtidos.



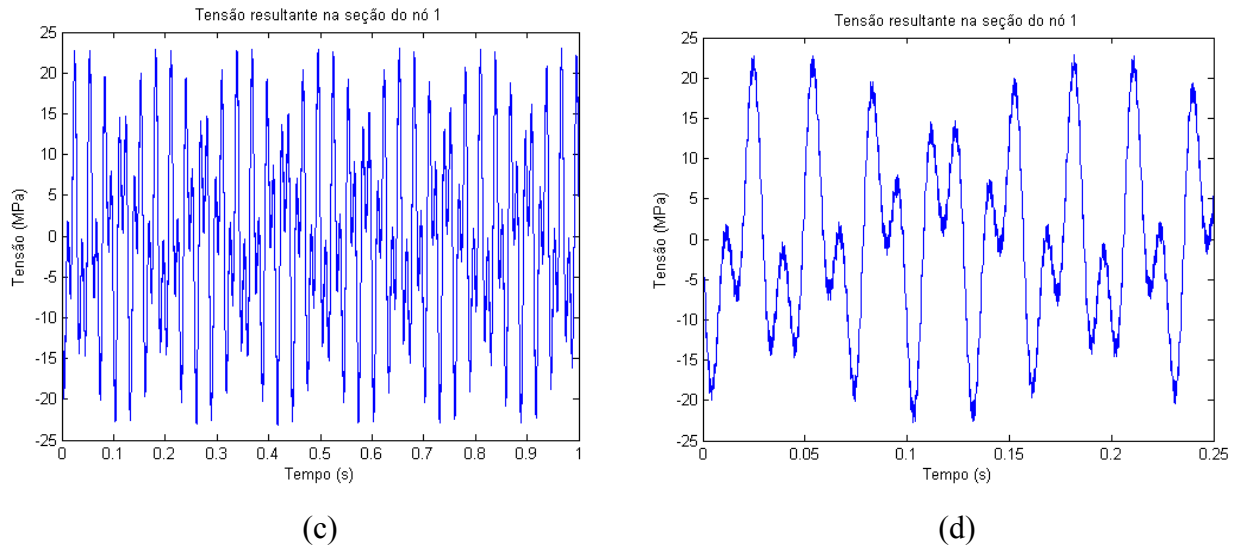


Figura 42: Tensões máximas ao longo do tempo na seção do nó 1; (a) Estado de tensão; (b) Ampliação; (c) Tensão equivalente de von Mises; (d) Ampliação.

A Figura 42(b) mostra, novamente, que a tensão devido à flexão do tubo não é proporcional à tensão devido ao forçamento axial. Como os dois forçamentos geram tensões de mesma natureza, normais à seção transversal do tubo, não é necessário calcular estudar o estado das tensões equivalentes na seção crítica, mas sim, o das tensões resultantes. A Figura 42(d) mostra que a tensão resultante hora é de compressão, hora de tração, além de sempre ser definida pela tensão normal devido ao carregamento axial, que nesse caso, é sempre maior do que a outra.

3.7 Tubo Engastado com Forçamento Axial, Transversal e Torçor

Para essa análise, considerou-se o mesmo tubo engastado. Tanto a vibração livre quanto a forçada foram estudadas. O programa utilizado para as análises encontra-se no **APÊNDICE G**.

O tubo foi dividido em três elementos finitos com o mesmo comprimento l . Cada nó recebeu quatro graus de liberdade, sendo um de deslocamento transversal, um de deslocamento axial, outro de deslocamento angular em torno do eixo perpendicular ao plano do papel e outro de deslocamento angular em torno do eixo longitudinal do tubo. No caso do nó que está engastado, seus graus de liberdade são nulos. As análises foram desenvolvidas desconsiderando o amortecimento do tubo. A Figura 43 mostra os graus de liberdade dos nós de cada elemento finito.

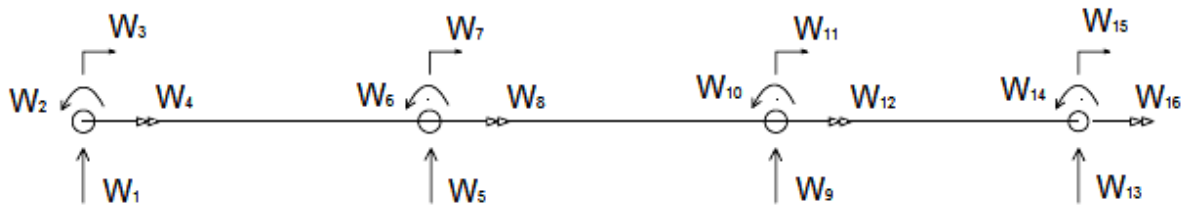


Figura 43: Graus de liberdade dos nós

Para o caso de vibração livre, as seguintes frequências naturais, em Hz, foram encontradas:

$$[\omega]_{flexão_axial_torcao} = \begin{bmatrix} 70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 441 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 631 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1086 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1245 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2065 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2804 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3550 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3745 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5276 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6441 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10519 \end{bmatrix}$$

A matriz de frequências naturais $[\omega]_{flexão_axial_torcao}$ é formada pelas frequências naturais devido a todos os graus de liberdade do tubo. É possível notar que os elementos ω_{44} , ω_{88} e ω_{1111} são as frequências naturais apresentadas pela matriz $[\omega]_{axial}$, os elementos ω_{11} , ω_{22} , ω_{55} , ω_{77} , ω_{1010} e ω_{1212} pela $[\omega]_{flexão}$ e ω_{33} , ω_{66} e ω_{99} pela $[\omega]_{torcao}$. O mesmo ocorre com os modos normais de vibração.

Para o caso de vibração forçada, considerou-se que a viga estava sujeita a um forçamento combinado, com uma força transversal do tipo $Q = Q_0 \sin(\omega_{ff} t)$, com $Q_0 = 1000 \text{ N}$ e $\omega_{ff} = 200 \text{ rad/s}$, uma axial do tipo $F = F_0 \sin(\omega_{fa} t)$, com $F_0 = 10 \text{ KN}$ e $\omega_{fa} = 200 \text{ rad/s}$ e um momento torçor do tipo $T = T_0 \sin(\omega_{ft} t)$, com $T_0 = 500 \text{ Nm}$ e $\omega_{ft} = 200 \text{ rad/s}$. Os forçamentos foram aplicados no último nó. A Figura 44 mostra os forçamentos sobre o tubo.

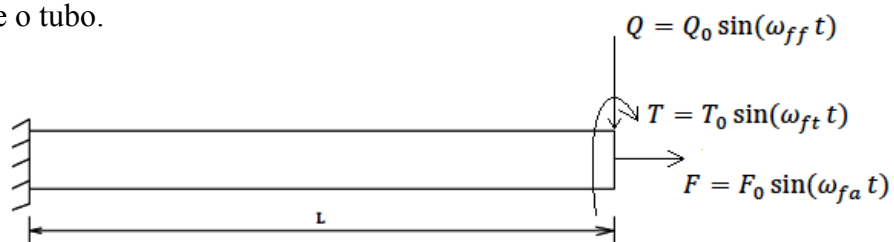
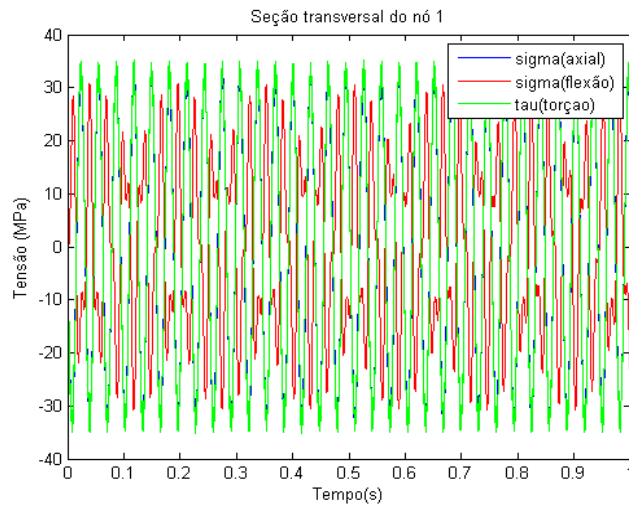
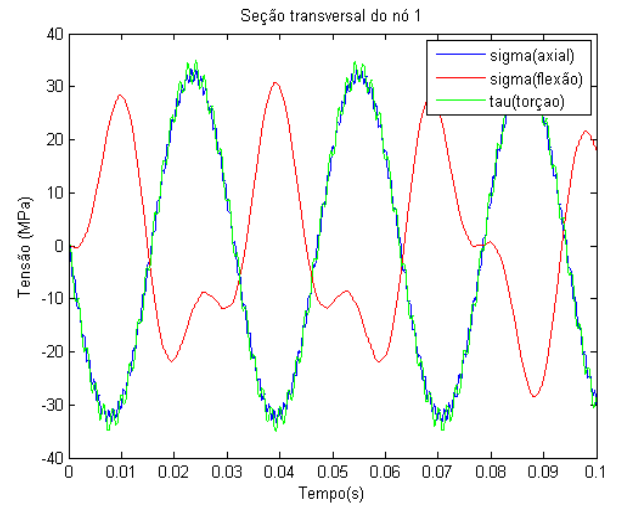


Figura 44: Forçamentos, transversal, axial e torçor.

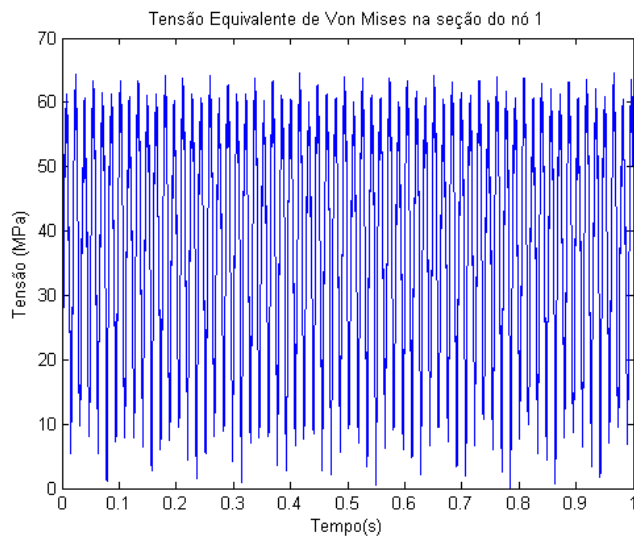
A Figura 45 mostra o estado de tensão obtido na seção transversal do nó 1, a seção crítica.



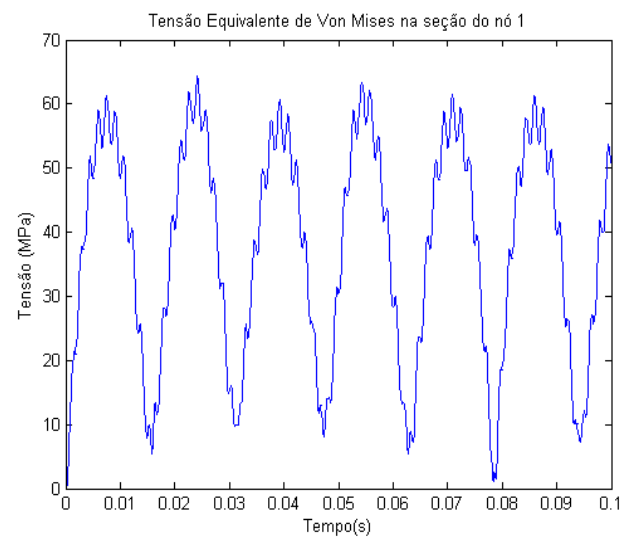
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 45: Tensões máximas ao longo do tempo na seção do nó 1. (a) Estado geral de tensão; (b) Ampliação; (c) Tensão equivalente de von Mises; (d) Ampliação.

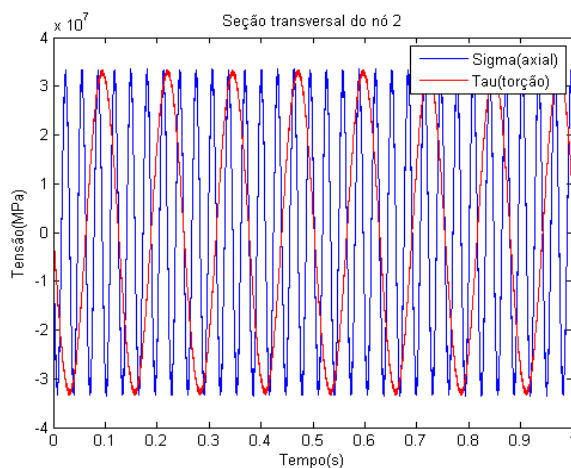
A Figura 45(b) mostra que embora todos os forçamentos possuam a mesma frequência, apenas as tensões sigma (axial) e tau (torção) estão em fase e são proporcionais. A tensão sigma (flexão) está fora de fase em relação às outras tensões, o que provoca um comportamento não uniforme das tensões equivalentes de von Mises, com máximos e mínimos diferentes para um mesmo período de vibração, como mostrado na Figura 45(d).

Esse comportamento é bastante crítico para a vida em fadiga do tubo, sendo de fundamental importância realizar um estudo do dano causado por esse tipo de resposta dinâmica.

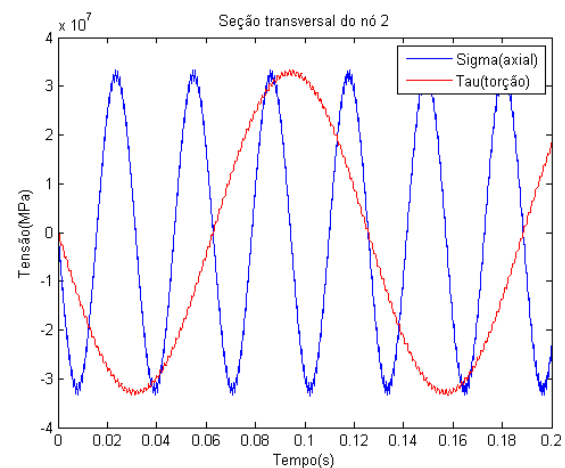
3.8 Estudo do Efeito da Variação das Frequências de Forçamento

O objetivo desse estudo é avaliar o efeito gerado no estado de tensão para o caso de carregamentos com diferentes frequências naturais de forçamento. Mais tarde, tal efeito será relacionado com a resistência à fadiga do tubo.

Como primeira análise, serão consideradas todas as variáveis do problema 3.4, exceto a frequência natural de forçamento torçor que será alterada para $\omega_{ft} = 50 \text{ rad/s}$. A Figura 46 mostra os resultados obtidos.



(a)



(b)

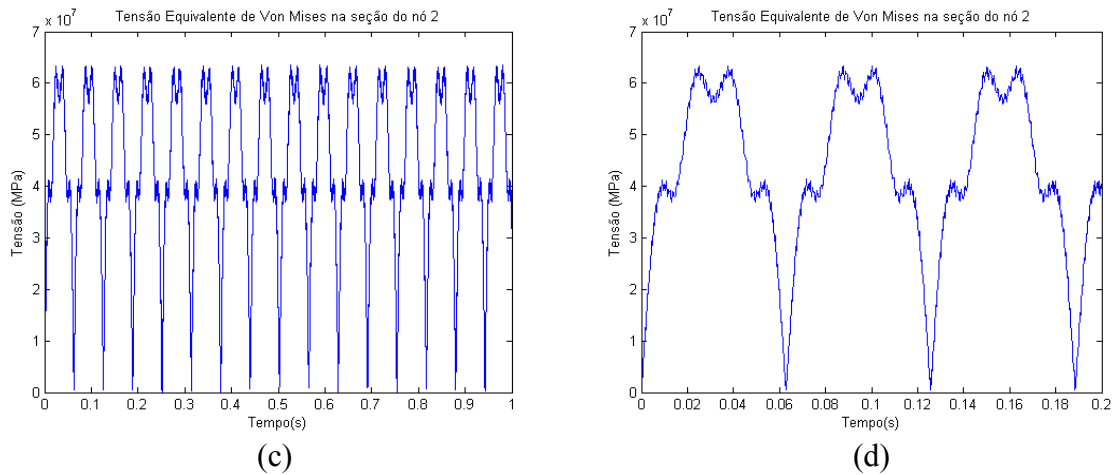


Figura 46: Tensões máximas ao longo do tempo na seção do nó 2 com $\omega_{fa} \neq \omega_{ft}$. (a) Estado de tensão; (b) Ampliação; (c) Tensão equivalente de von Mises; (d) Ampliação.

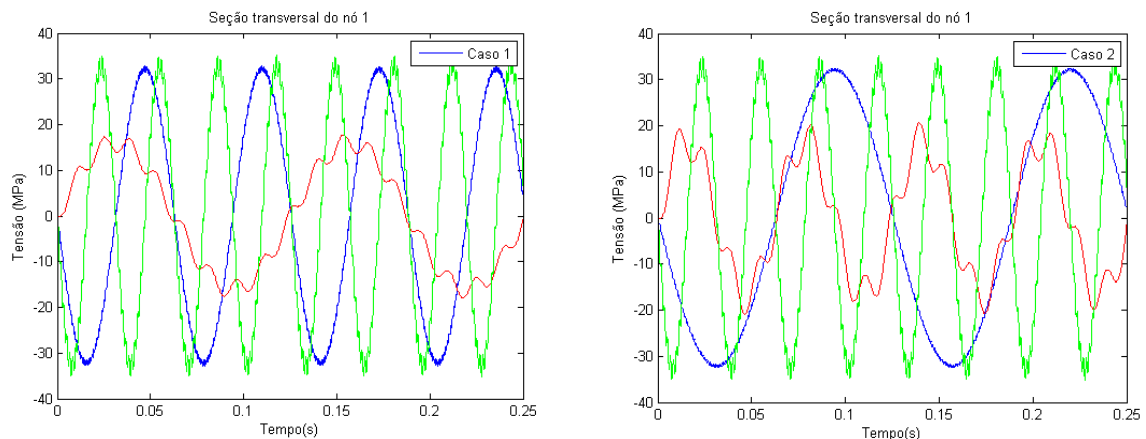
A Figura 46(b) mostra que as tensões, normal e de cisalhamento, estão fora de fase. Isso foi provocado pela diferença das frequências naturais de forçamento. Esse tipo de resposta caracteriza a condição de carregamento não proporcional.

Agora, foi estudado o efeito da variação das frequências de forçamento para o caso 3.7, que possui todos os três tipos de forçamento. A Tabela 3 resume os três casos estudados.

Tabela 3: Frequências de forçamento utilizadas em cada caso.

	Caso 1	Caso 2	Caso 3
ω_{ff}	50	100	200
ω_{fa}	100	50	100
ω_{ft}	200	200	50

As Figuras 47 e 48 comparam os resultados obtidos em cada caso.



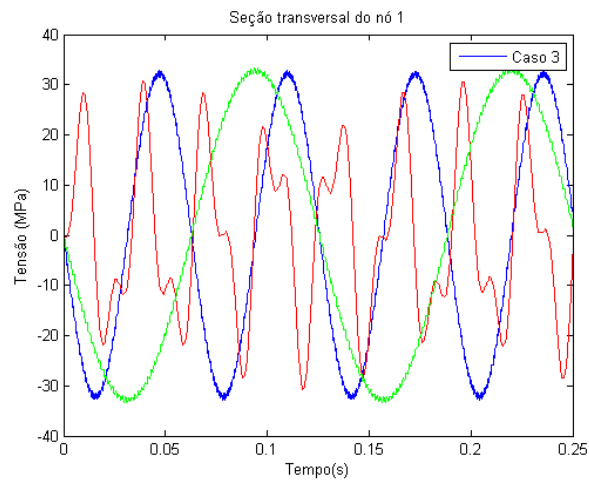


Figura 47: Estados de tensão.

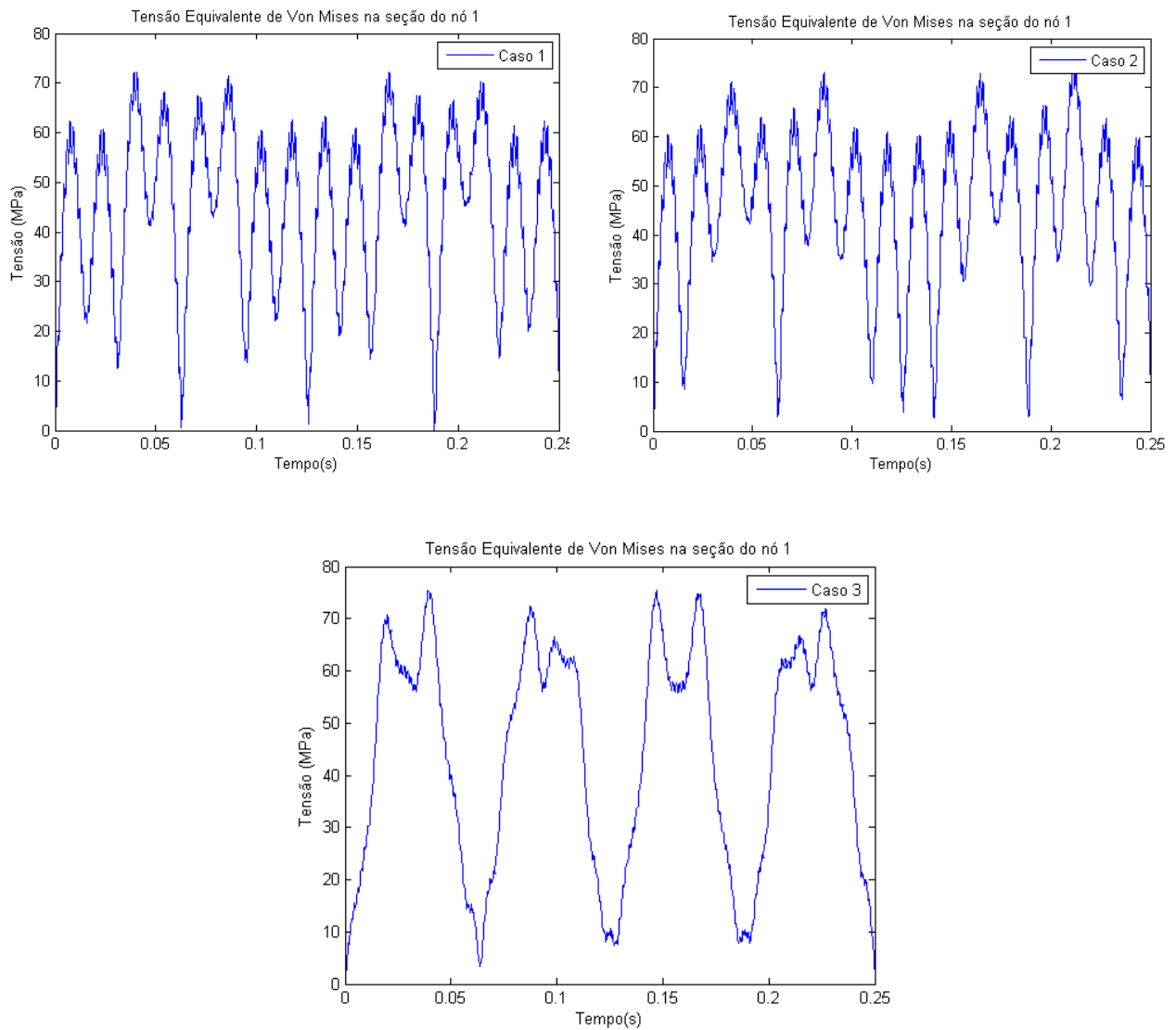


Figura 48: Tensão equivalente de von Mises.

3.9 Estudo do Efeito da Ressonância

O objetivo desse estudo é avaliar como o estado de tensão se altera em função da frequência de forçamento ser muito próxima de cada frequência natural de vibração. Para isso, considerou-se o estudo realizado na seção 3.3, tubo engastado com forçamento transversal, só que dessa vez o amortecimento da estrutura não foi desprezado, considerando $\alpha = \beta = 0,00001$.

A Tabela 4 mostra as frequências naturais de vibração consideradas em cada análise. É importante destacar que as frequências utilizadas são próximas, porém diferentes, das frequências naturais para cada modo normal de vibração.

Tabela 4: Frequências de forçamento.

Modos de Vibração	Frequências Naturais (rad/s)	Frequências de forçamento (rad/s)
1°	440	420
2°	2768	2748
3°	7822	7802
4°	17615	17595
5°	33152	33132
6°	66093	66073

Seis programas foram rodados, alterando somente as frequências naturais de forçamento. A Figura 49 mostra um gráfico resumindo as máximas tensões encontradas nas seções 1,2 e 3 do tubo, para cada modo normal de vibração.

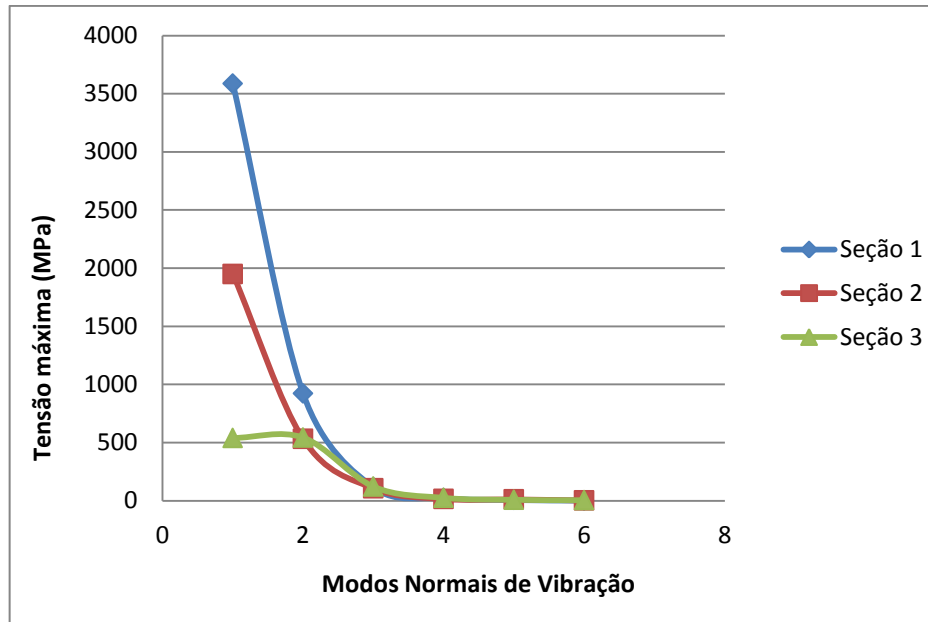


Figura 49: Comportamento das tensões ao longo do tubo, em função do modo normal de vibração.

A Figura 49 mostra que o primeiro modo normal de vibração é o mais crítico, pois apresenta as maiores tensões ao longo do tempo em todas as seções. Isso mostra que, dentre todas as frequências naturais de vibração, a que possui o menor valor é a mais crítica.

Capítulo 4

Análises de Fadiga Multiaxial

Diversas análises dinâmicas foram feitas considerando diferentes cenários de carregamento, determinando assim, os estados de tensão para cada caso. O presente capítulo visa implementar alguns conceitos de fadiga multiaxial sobre os modelos desenvolvidos nos itens 3.4 e 3.5, utilizando como base os programas desenvolvidos em suas análises dinâmicas.

Variações de alguns parâmetros foram feitas para verificar o impacto sobre a vida do tubo, como frequências de forçamento, defasagem dos forçamentos, espessura do tubo, propriedades mecânicas, entre outros.

4.1 Carregamentos em Fase: Axial e Torçor

Esse primeiro modelo é o mesmo desenvolvido no item 3.4 e visa estudar a fadiga do tubo quando as frequências de forçamento axial e torçor são as mesmas ($w_{fa} = w_{ft} = 200$ rad/s). O estado de tensão na seção engastada do tubo foi determinado no capítulo anterior e está representada pela Figura 50.

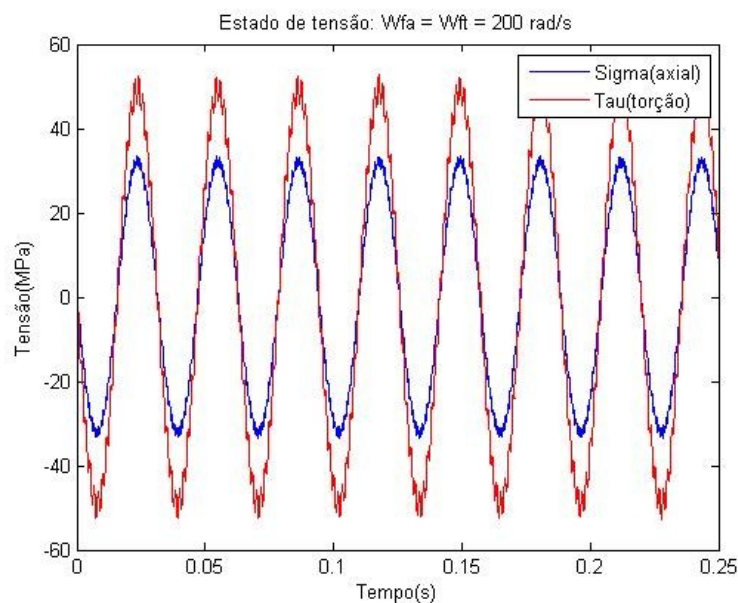


Figura 50: Estado de tensão: $w_{fa} = w_{ft} = 200$ rad/s.

A Figura 50 mostra que os carregamentos estão em fase, pois possuem a mesma frequência de forçamento e o mesmo tipo de função forçamento. Isso faz com que esse cenário seja de carregamentos proporcionais. Para validar essa afirmação, as Figuras 51 e 52 mostram a variação da direção da tensão principal bem como o comportamento das deformações normais e de cisalhamento, respectivamente.

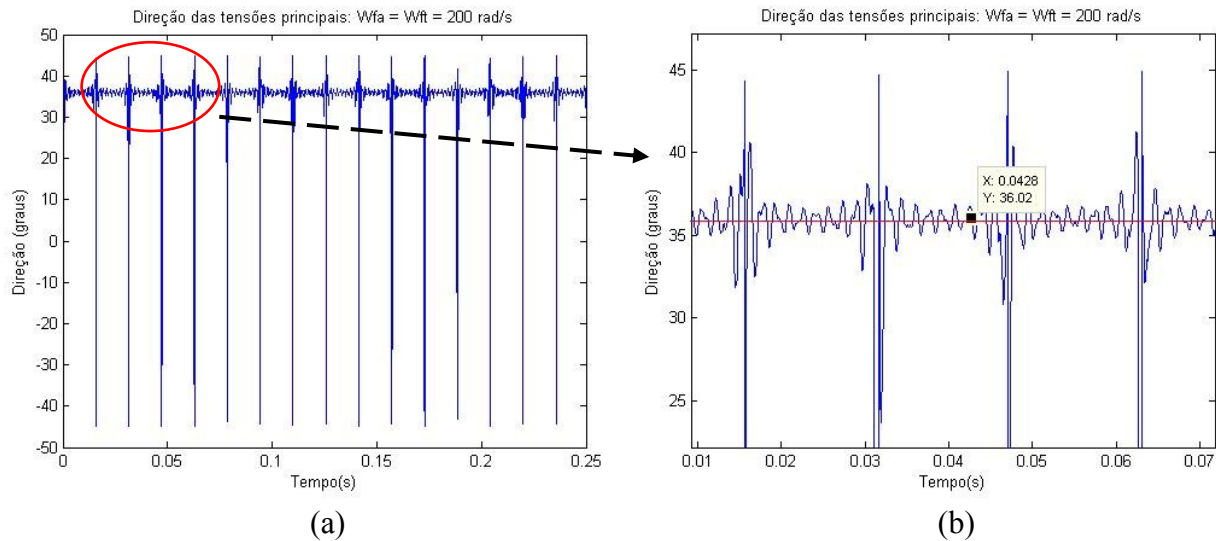


Figura 51: Direção da tensão principal. (a) Variação no tempo; (b) Ampliação.

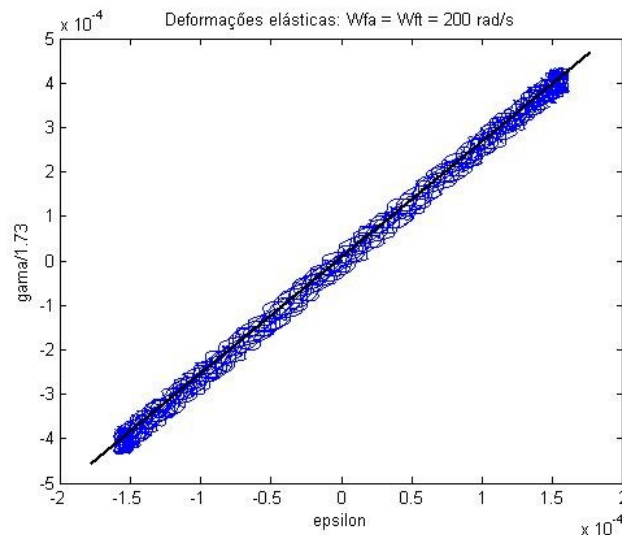


Figura 52: Relação entre as deformações normais e de cisalhamento.

A Figura 51(a) mostra que a direção da tensão principal tem uma variação discreta ao longo do tempo. Tais variações podem ser atribuídas aos fenômenos dinâmicos do problema, que não são identificados em uma análise estática.

As mudanças bruscas de direção, representadas pelas linhas verticais, ocorrem em cada ponto de inflexão das tensões, quando uma das tensões tende a zero. A Figura 53 mostra uma ampliação da Figura 51(b).

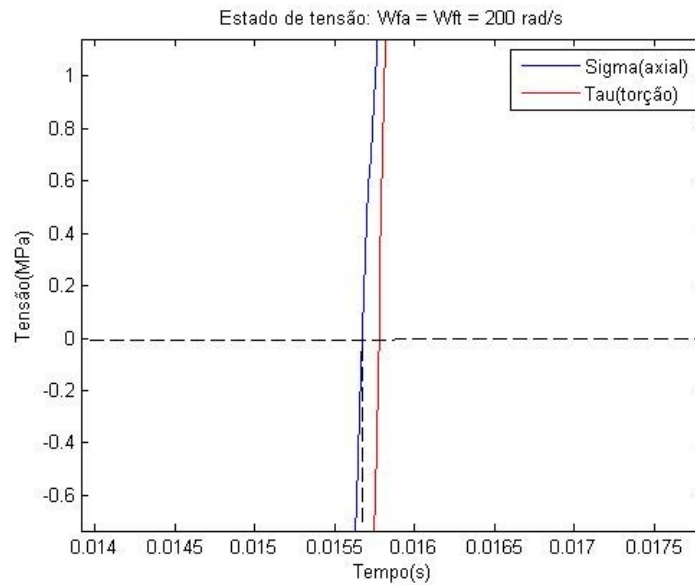


Figura 53: Ampliação da Figura 51(b).

A Figura 53 mostra que quando a tensão normal σ_x tende a zero, a tensão de cisalhamento τ_{xy} ainda é negativa. Matematicamente, pode-se mostrar esse comportamento através das Equações 161, 162 e 163.

$$2\theta_p = \tan^{-1}\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x}\right) \quad (161)$$

No limite em que $\sigma_x \rightarrow 0$:

$$2\theta_p = \lim_{\sigma_x \rightarrow 0 \text{ e } \tau_{xy} < 0} \left[\tan^{-1}\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x}\right) \right] \quad (162)$$

$$2\theta_p \rightarrow -\frac{\pi}{4} \quad (163)$$

A Figura 51(b) mostra a tendência da direção da tensão principal não variar ao longo do tempo, com uma reta passando pelos pontos presentes no gráfico. Na média, a direção da tensão principal permanece em $36,02^\circ$ com uma variação muito pequena ao seu redor.

A Figura 52 também mostra que o comportamento das deformações tende a se manter como uma reta. Esse tipo de comportamento é característico de carregamentos proporcionais, o que já não acontece com os não proporcionais.

O círculo de Mohr para esse carregamento está plotado em quatro diferentes instantes de tempo, associados aos steps definidos no programa. A Tabela 5 mostra os valores obtidos pela análise para a plotagem do gráfico.

Tabela 5: Dados para o círculo de Mohr.

Step	Instante de tempo (s)	σ_x (MPa)	τ_{xy} (MPa)
100	0,00078812	-5,8778	-7,5288
1000	0,0075	-31,2220	-52,3450
10000	0,0664	-20,3370	-34,0230
40000	0,2388	20,0950	26,1440

A Figura 54 ilustra os quatro círculos de Mohr para os respectivos steps escolhidos.

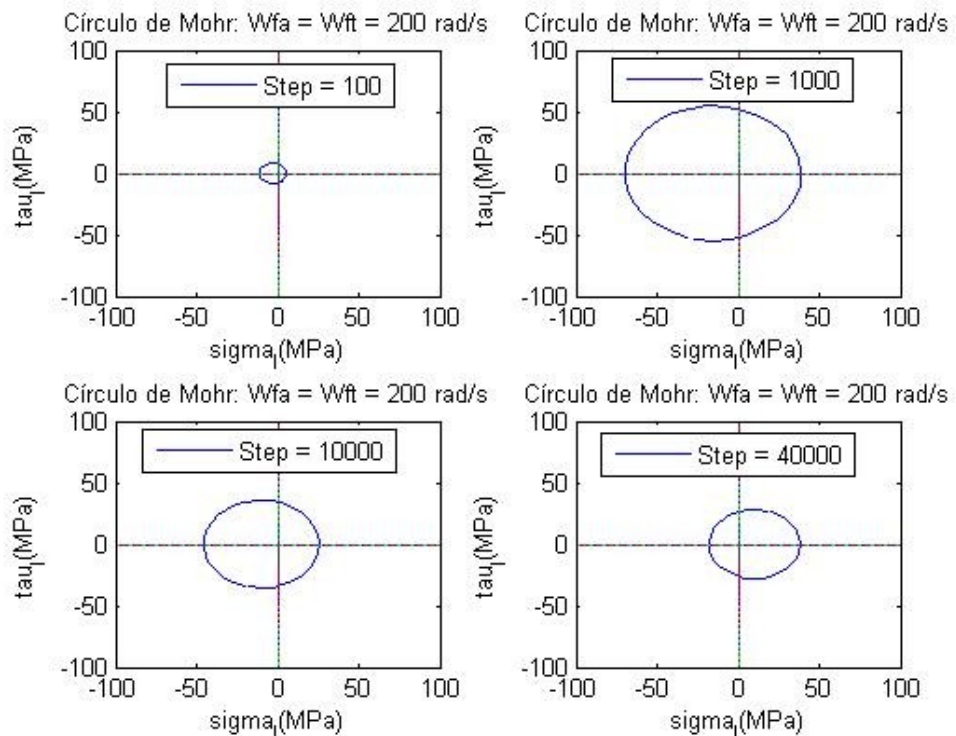


Figura 54: Círculo de Mohr nos steps 100, 1000, 10000 e 40000.

A Figura 54 mostra que conforme o tempo passa, o círculo de Mohr translada sobre o eixo das abscissas, alterando a posição do seu centro, além de variar o valor do seu raio.

O critério de Sines será utilizado para a solução desse problema, pois os carregamentos são proporcionais. Para isso, a Equação 152 deve ser resolvida, considerando os dados fornecidos pelo problema e as aproximações consideradas no capítulo anterior para as propriedades do material. Para simplificar os cálculos, a Equação 152 será reescrita na forma apresentada pela Equação 164.

$$LE_{Sines} = \beta_{Sines} \quad (164)$$

$$LE_{Sines} = C_1 + \alpha_{Sines} \cdot C_2 \quad (165)$$

Dessa forma, a Tabela 6 resume os cálculos realizados.

Tabela 6: Resumo dos cálculos de fadiga realizados.

Propriedades do material		
S_y	252	MPa
S_{ut}	441	MPa
σ_f'	1384	MPa
b	-0,156	
Tensões		
$\Delta\sigma_x$	66,990	MPa
$\Delta\tau_{xy}$	105,310	MPa
$\bar{\sigma}_x$	-0,011076	MPa
Critério de Sines		
C_1	45,800442	MPa
C_2	-0,011076	MPa
N_f	10^7	ciclos
S_L	100,502	MPa
S_{LP}	81,849080	MPa
α_{Sines}	0,107431	
β_{Sines}	47,38	MPa
LE_{Sines}	45,80	MPa
Conclusão		
NÃO FALHA		

A Tabela 6 mostra que $LE_{Sines} < \beta_{Sines}$, logo o ponto crítico da seção crítica possui vida infinita, pois os cálculos foram realizados considerando 10 milhões de ciclos.

O critério de Sines é dependente diretamente somente do limite de resistência do material, e não do seu escoamento. Dessa forma, pode-se determinar o valor do S_{ut}^{min} do material para garantir uma vida infinita de no mínimo 10^7 ciclos, mantendo todos os outros parâmetros constantes. Para isso, é necessário que a razão $\delta_{Sines} < 1$, onde $\delta_{Sines} = \frac{LE_{Sines}}{\beta_{Sines}}$. A Figura 55 mostra a relação entre $S_{ut} \times \delta_{Sines}$.

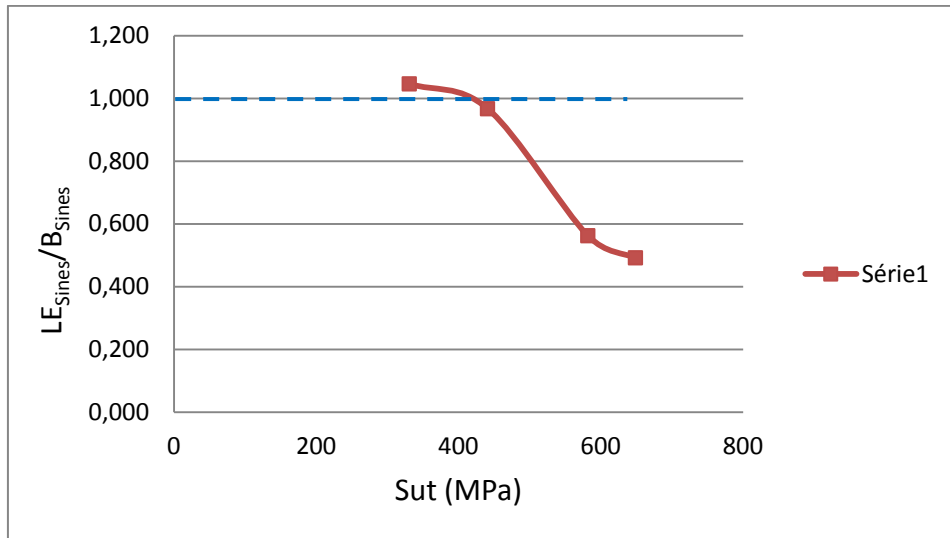


Figura 55: Relação $S_{ut} \times \delta_{Sines}$.

A Figura 55 mostra que materiais com limite de resistência abaixo de 400 MPa, aproximadamente, estão sujeitos a uma vida finita em fadiga para este carregamento. O comportamento da curva é não linear justamente porque os fatores σ'_f e b , utilizados na Equação 156 de Basquin, também variam com o S_{ut} do material.

Com relação aos carregamentos definidos na seção 3.4, a razão entre a amplitude da força axial e do momento torçor vale $F_0/T_0 = 13,33 \text{ m}^{-1}$. Variando-se este parâmetro, mantendo todos os outros constantes, pode-se determinar sua relação com o parâmetro δ_{Sines} , conforme mostra a Figura 56.

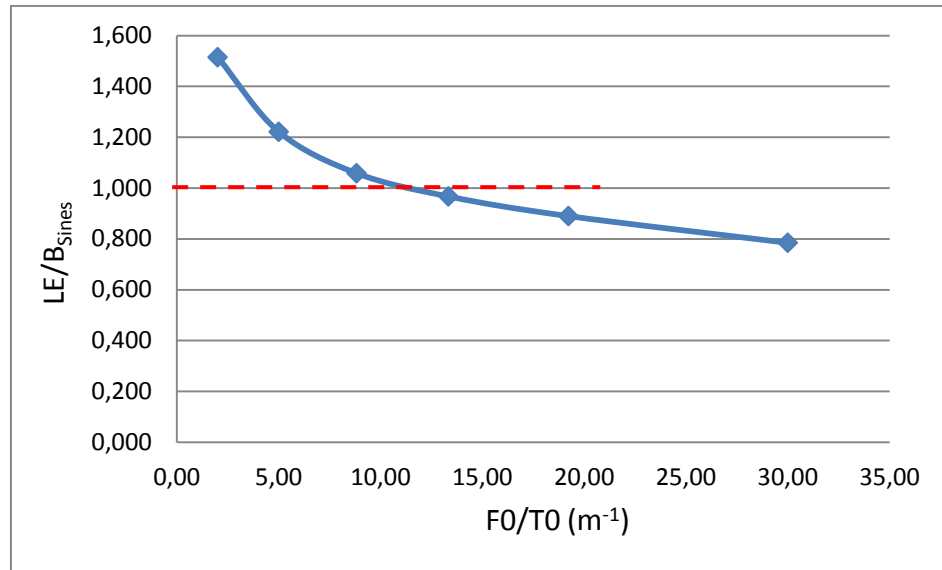


Figura 56: Relação $F_0/T_0 \times \delta_{Sines}$.

A Figura 56 mostra que para amplitudes de forçamento axial maiores do que, aproximadamente, 10 vezes a amplitude do forçamento torçor, o tubo possui vida infinita. Nota-se também que à medida que F_0 se torna cada vez menor do que T_0 , δ_{Sines} tende a aumentar indefinidamente. Isso mostra que, para as condições estabelecidas neste problema, o forçamento torçor é mais crítico do que a força axial.

4.2 Carregamentos Fora de Fase: Axial e Torçor

Os carregamentos podem estar fora de fase caso suas frequências de forçamento sejam diferentes, ou então, caso estejam defasados por um determinado ângulo $\Delta\alpha$. Inicialmente será estudado o efeito gerado sobre os carregamentos quando as frequências de forçamento são diferentes.

Três casos foram desenvolvidos baseados no modelo proposto no item 3.4. O caso 01 supôs que w_{fa} era constante e w_{ft} variável; o caso 02 supôs o contrário do caso 01 e o caso 03 variou os dois forçamentos ao mesmo tempo. A Tabela 7 resume os valores de frequências de forçamentos adotados nos três casos.

Tabela 7: Frequências de forçamento adotadas para nos casos 01, 02 e 03.

FREQUÊNCIAS DE FORÇAMENTO (rad/s)					
Caso 01		Caso 02		Caso 03	
w_{fa}	w_{ft}/w_{fa}	w_{fa}	w_{ft}/w_{fa}	w_{fa}	w_{ft}/w_{fa}
200	0,25	50	4	50	7,00
	0,50	100	2	100	3,00
	1,00	200	1	200	1,00
	1,50	300	0,67	300	0,34
	1,75	350	0,57	350	0,14

A Figura 57 mostra como a máxima variação da direção da tensão principal varia em função da razão $\frac{w_{ft}}{w_{fa}}$ para os três casos.

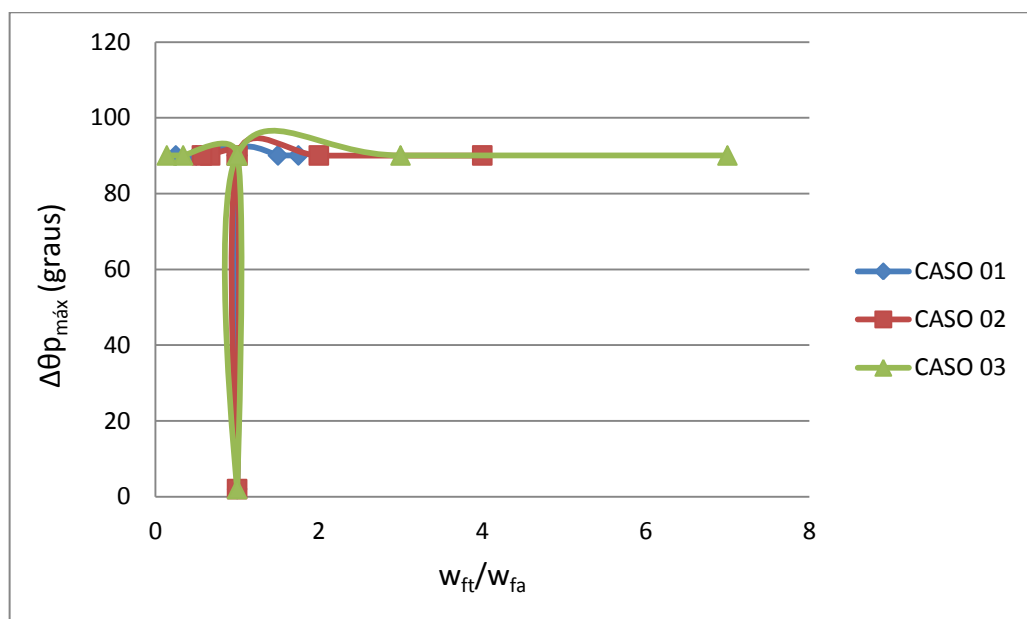


Figura 57: Máxima variação da direção principal em função de $\frac{w_{ft}}{w_{fa}}$.

A Figura 57 mostra que o comportamento de $\Delta\theta_{p\text{ máx}}$ é praticamente igual para os três casos estudados. Nota-se apenas que quando $\frac{w_{ft}}{w_{fa}} = 1$, a variação $\Delta\theta_{p\text{ máx}}$ tende a zero, correspondendo a um carregamento proporcional. Ou seja, quando os carregamentos externos

possuem frequências de forçamento diferentes, eles se classificam como CNP, caso contrário de CP.

Dessa forma, a análise de fadiga multiaxial precisa ser desenvolvida em cima de algum critério para carregamentos não proporcionais, como é o caso do critério de Findley por exemplo.

Agora, o efeito da defasagem dos carregamentos por um ângulo qualquer $\Delta\alpha$ será considerado para o mesmo modelo. A influência dessa defasagem deve ser capaz de mostrar, aproximadamente, qual é o $\Delta\alpha_{\text{crítico}}$ para uma vida infinita desse tubo sob fadiga. Nesse estudo, as duas frequências de forçamento são consideradas iguais e, o forçamento axial será defasado do torçor, que permanecerá o mesmo. A Tabela 8 e a Figura 58 mostram as situações consideradas nas análises para a defasagem dos carregamentos.

Tabela 8: Defasagem $\Delta\alpha$ entre os carregamentos.

$\Delta\alpha$ (°)						
0	15	30	45	60	75	90

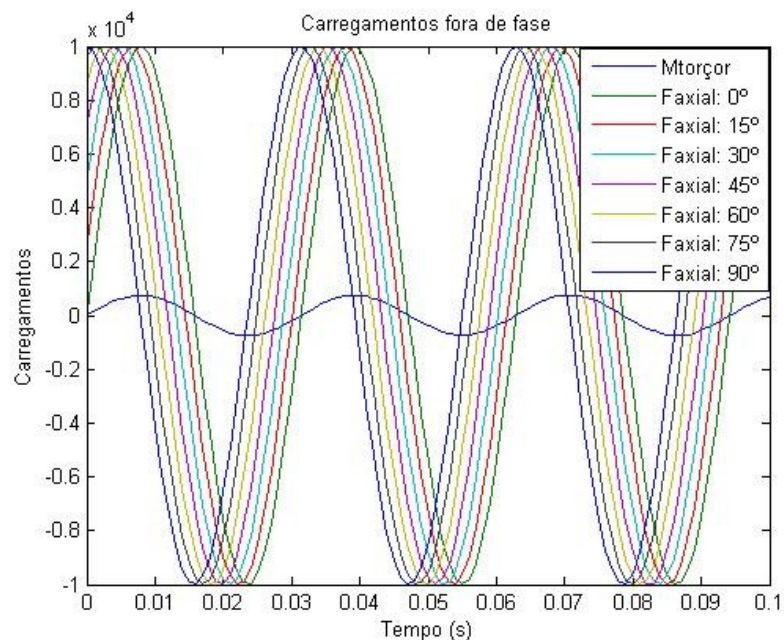


Figura 58: Carregamentos fora de fase.

Sabe-se que esses carregamentos também são do tipo não proporcional. Para facilitar uma futura análise de fadiga, traçou-se o gráfico apresentado na Figura 59 a fim de

estabelecer qual é a defasagem crítica entre os carregamentos, $\Delta\alpha_{crítico}$. A Figura 59 mostra a variação da máxima tensão equivalente de von Mises em função do ângulo de defasagem $\Delta\alpha$.

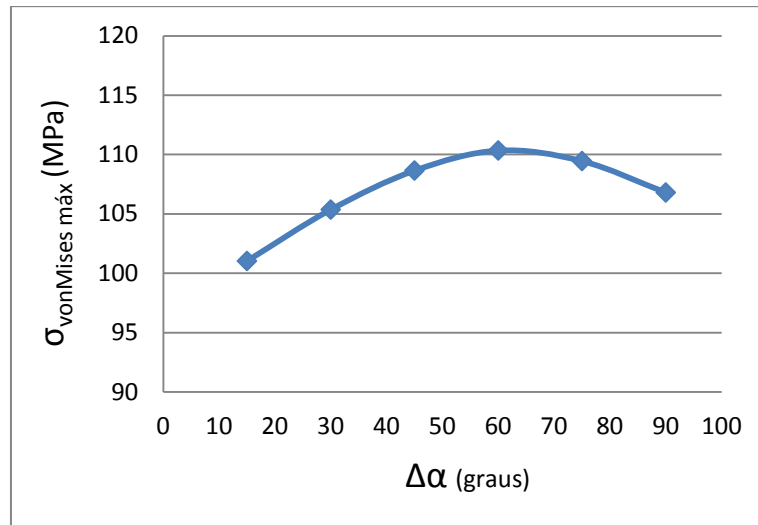


Figura 59: Tensão máxima de von Mises em função de $\Delta\alpha$.

A Figura 59 mostra que o valor de $\Delta\alpha_{crítico}$ encontra-se entre 55° e 65° . Fazendo uma análise mais refinada entre esses valores, é possível chegar no $\Delta\alpha_{crítico}$ como mostra a Figura 60.

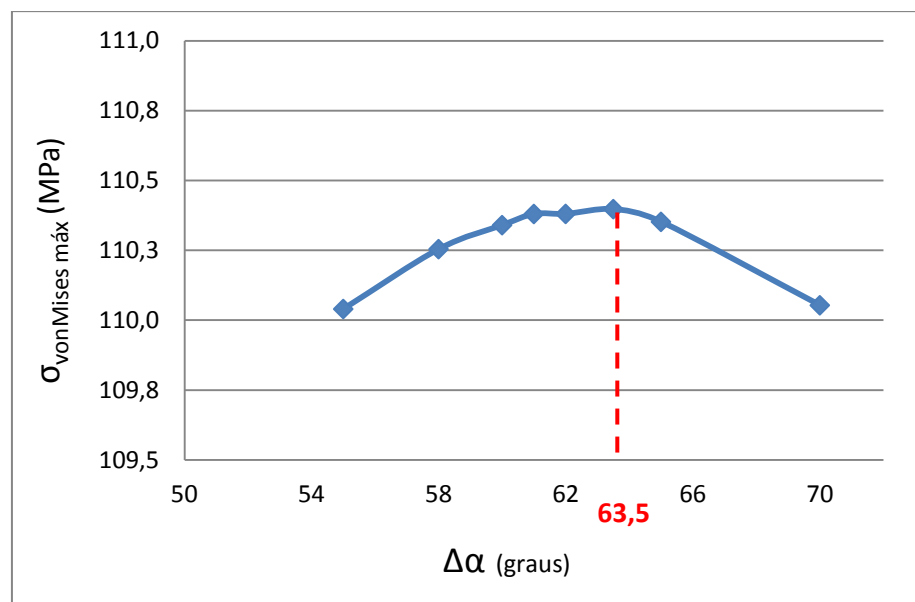


Figura 60: Determinação do $\Delta\alpha_{crítico}$.

A Figura 60 mostra que a defasagem crítica para o modelo estudado é igual a $63,5^\circ$, pois apresenta a maior tensão equivalente de von Mises. Sendo assim, será estudado o comportamento à fadiga do tubo para esta situação de defasagem.

O critério de Findley será utilizado para a solução desse problema, pois os carregamentos são não proporcionais. Para isso, a Equação 158 deve ser resolvida, considerando os dados fornecidos pelo problema e os parâmetros considerados no capítulo anterior para as propriedades do material e para as constantes de Findley. Para simplificar os cálculos, a Equação 158 será reescrita na forma da Equação 166.

$$LE_{Findley} = \beta_{Findley} \quad (166)$$

Onde:

$$LE_{Findley} = \left[\frac{\Delta\tau(\theta)}{2} + \alpha_{Findley} \cdot \sigma(\theta) \right]_{m\acute{a}x} \quad (167)$$

Para resolver a Equação 166, deve-se determinar para o carregamento definido, em qual plano principal de direção θ_p o fator $LE_{Findley}$ é máximo. As Figuras 61 e 62 mostram, respectivamente, a variação da tensão de cisalhamento e da tensão normal ao longo do tempo para diferentes planos.

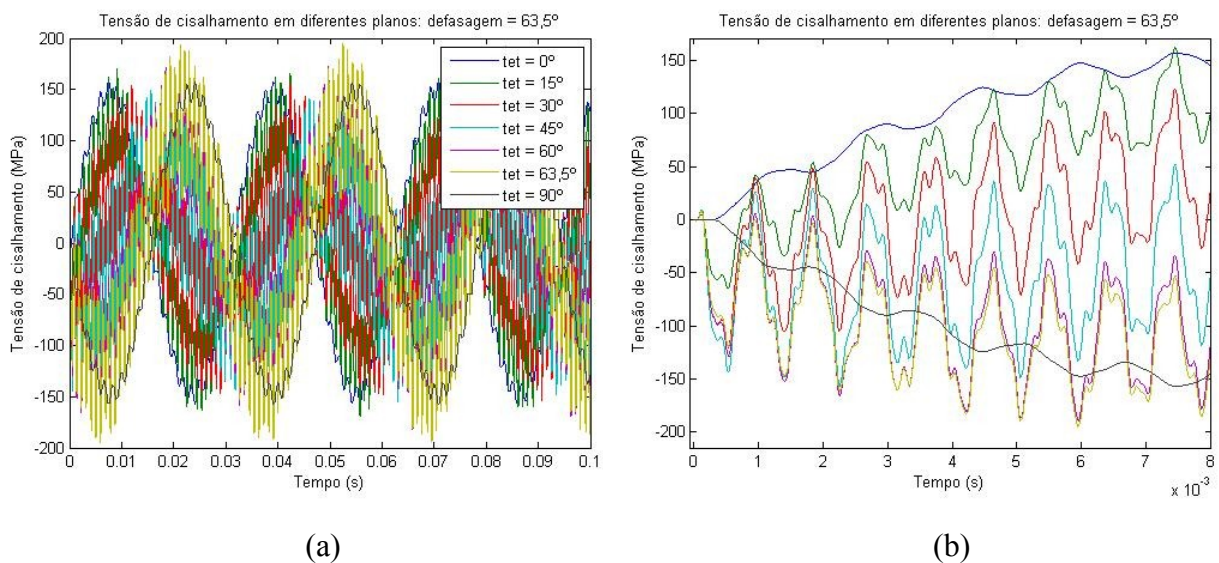


Figura 61: Variação da tensão de cisalhamento em diferentes planos.

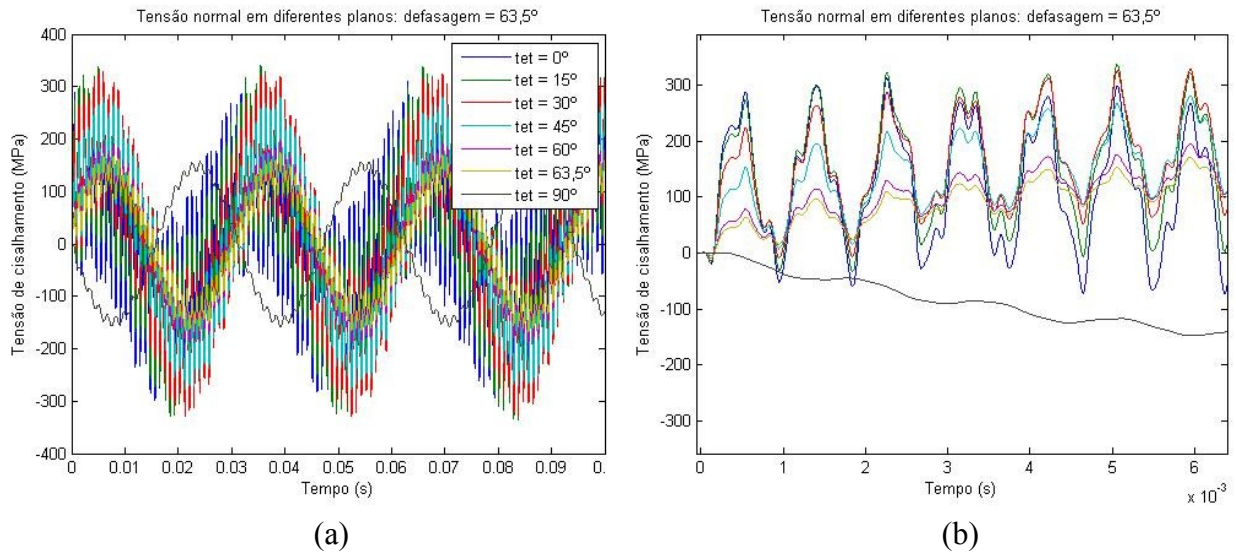


Figura 62: Variação da tensão normal em diferentes planos.

A Tabela 9 mostra as máximas e mínimas tensões encontradas para diferentes direções.

Tabela 9: Máximas e mínimas tensões normais e de cisalhamento em diferentes direções.

θ_p (°)	$\sigma_{\text{máx}}$ (MPa)	$\sigma_{\text{mín}}$ (MPa)	$\Delta\sigma$ (MPa)	$\tau_{\text{máx}}$ (MPa)	$\tau_{\text{mín}}$ (MPa)	$\Delta\tau/2$ (MPa)
0	78,76	-78,73	157,49	52,45	-52,38	52,42
15	89,49	-87,95	177,44	53,56	-51,23	52,40
30	92,54	-91,99	184,53	44,46	-41,79	43,13
45	82,69	-80,72	163,41	39,38	-39,38	39,38
60	60,47	-57,85	118,32	53,11	-53,43	53,27
63,5	53,85	-51,51	105,36	55,44	-56,2	55,82
90	78,73	-78,76	157,49	52,38	-52,45	52,42

Considerando o material do tubo definido na seção 3.4 e utilizando os dados fornecidos pela Tabela 1, determinam-se as constantes de Findley e conseqüentemente a relação $\delta_{\text{Findley}} = \frac{LE_{\text{Findley}}}{\beta_{\text{Findley}}}$, para cada ângulo θ . As constantes de Findley são $\alpha_{\text{Findley}} = 0,1236$ e $\beta_{\text{Findley}} = 152,25 \text{ MPa}$. A Tabela 10 apresenta os valores encontrados para o parâmetro δ_{Findley} .

Tabela 10: Parâmetro $\delta_{Findley}$ para diferentes direções θ .

θ_p (°)	$LE_{Findley}$ (MPa)	$\delta_{Findley}$
0	72,61	0,359
15	75,34	0,372
30	66,85	0,330
45	60,58	0,299
60	68,77	0,340
63,5	69,63	0,344
90	72,60	0,359

A Tabela 10 mostra que $LE_{Findley, \max} = 75,34 \text{ MPa} < 152,25 \text{ MPa} = \beta_{Findley}$, em $\theta_p = 15^\circ$. Para todos os planos verificados, o fator $\delta_{Findley}$ é sempre menor do que a unidade. Isso mostra que, segundo o critério de Findley, o tubo possui vida infinita sob fadiga nessas condições. Cabe ressaltar que uma análise mais refinada em torno de $\theta_p = 15^\circ$ deve ser realizada para aumentar a precisão da direção do plano crítico.

Variando a razão F_0/T_0 , o valor de $\delta_{Findley}$ também muda até ultrapassar a unidade, resultando em uma vida finita do tubo sob fadiga. A Figura 63 mostra esse comportamento.

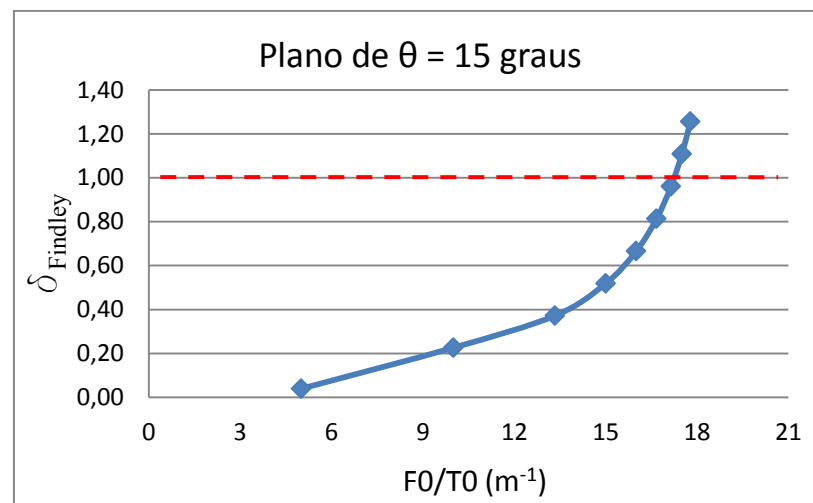


Figura 63: Relação F_0/T_0 x $\delta_{Findley}$ para $\theta = 15^\circ$.

4.3 – Forçamentos Fora de Fase: Transversal e Torçor

O modelo do tubo adotado nessa seção foi o desenvolvido no item 3.5. Conforme mostrado na Figura 39 (b), o carregamento transversal gera tensões normais de flexão que, naturalmente, encontram-se fora de fase com as tensões de cisalhamento ocasionadas pelo momento torçor. Para confirmar esse comportamento, a Figura 64 mostra a variação da direção principal ao longo do tempo.

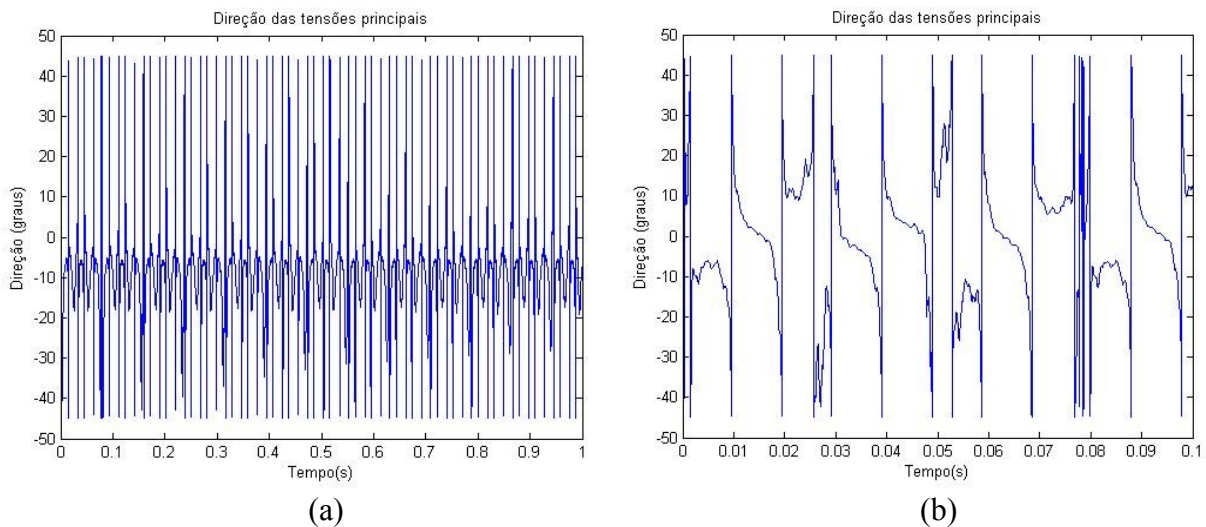


Figura 64: Variação da direção da tensão principal ao longo do tempo.

A Figura 64 mostra que a direção da tensão principal varia ao longo do tempo. Isso confirma que, embora o carregamento seja proporcional, o estado de tensão é não proporcional. Para fazer uma análise mais geral, será avaliado o comportamento desse tubo sob fadiga, considerando os casos de defasagem $\Delta\alpha$ dos carregamentos, definidos pela Tabela (11).

Tabela 11: Defasagem angular para os carregamentos.

$\Delta\alpha$ (°)														
0	15	30	45	60	75	90	95	100	105	120	135	150	165	180

Para quantificar o valor de $\Delta\alpha_{critico}$, no qual ocorre a máxima tensão equivalente de von Mises, a Figura 65 mostra o comportamento da máxima tensão equivalente de von Mises em função de $\Delta\alpha$.

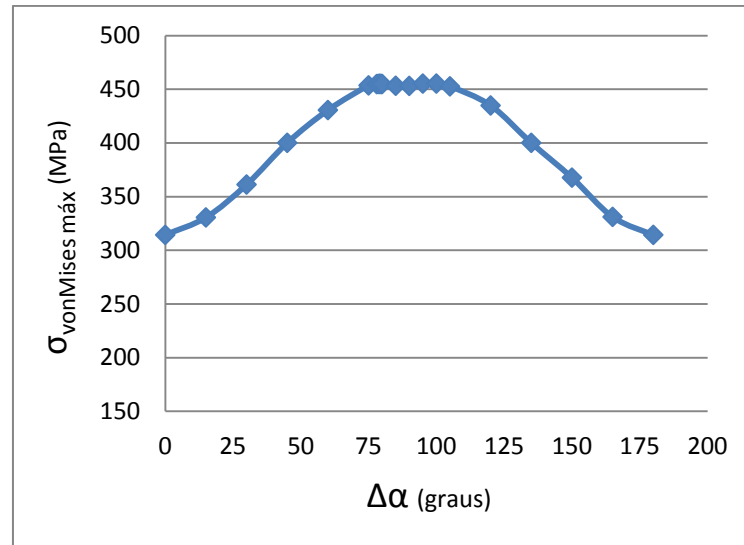


Figura 65: Variação da máxima tensão equivalente de von Mises em função de $\Delta\alpha$.

A Figura 65 mostra que a máxima tensão equivalente de von Mises encontra-se entre os planos $75 \leq \Delta\alpha \leq 105^\circ$. Fazendo uma análise mais refinada entre esses dois valores, a Figura 66 mostra com exatidão o valor de $\Delta\alpha_{\text{crítico}}$.

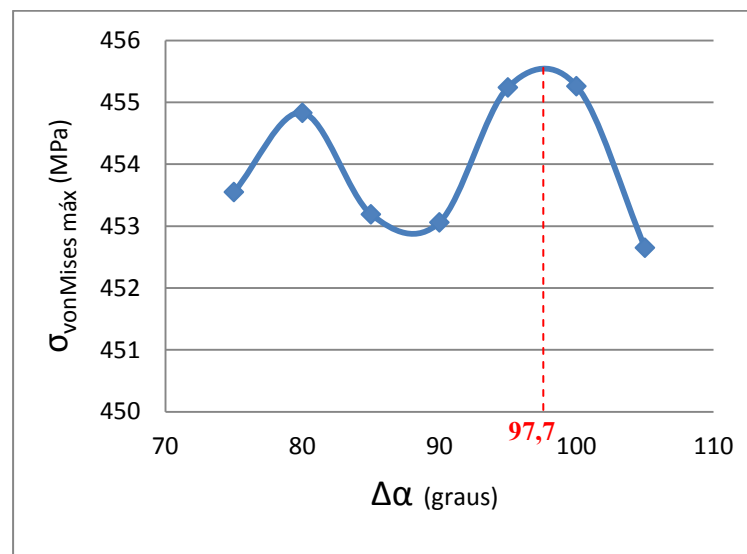


Figura 66: Ampliação da Figura 65.

A Figura 66 mostra que $\Delta\alpha_{\text{crítico}} = 97,7^\circ$. Dessa forma, para esse ângulo de defasagem os forçamentos combinam-se originando as maiores tensões equivalentes de von Mises. Portanto, será avaliado o dano à fadiga para $\Delta\alpha_{\text{crítico}} = 97,7^\circ$ utilizando o critério de falha de Findley.

As Figuras 67, 68, 69 e 70, mostram a variação das tensões normais e de cisalhamento ao longo do tempo para diferentes direções θ_p .

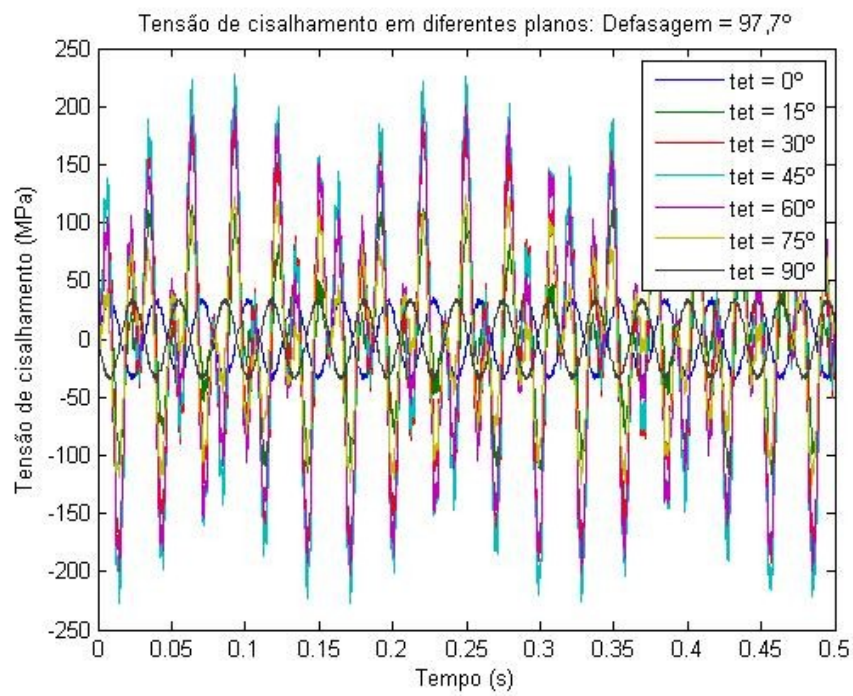


Figura 67: Variação da tensão de cisalhamento em diferentes planos.

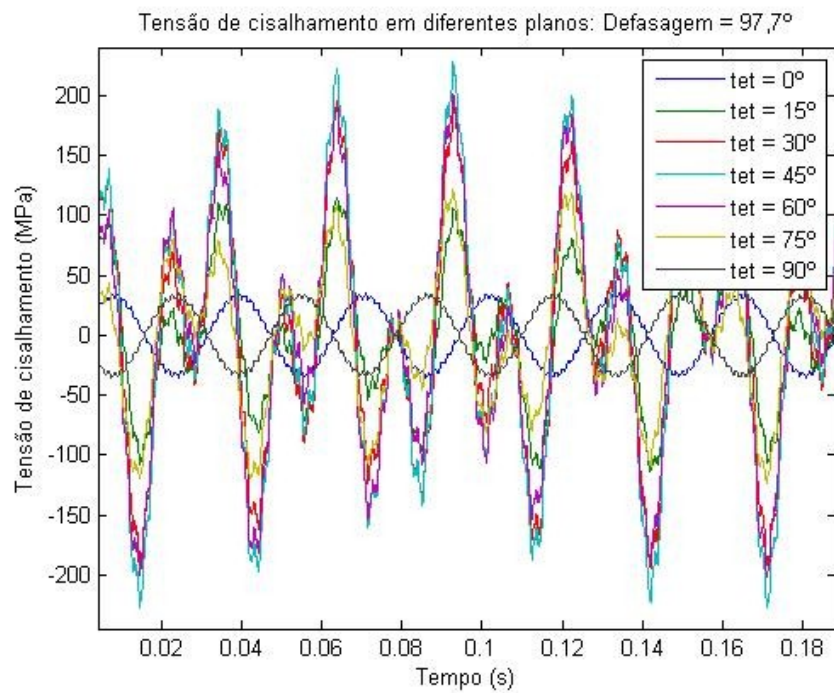


Figura 68: Ampliação da Figura 67.

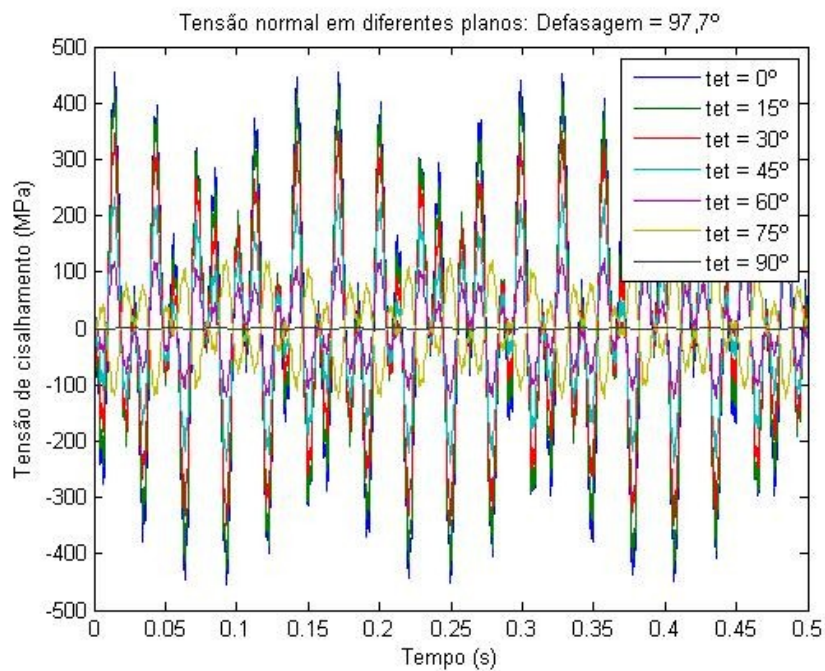


Figura 69: Variação da tensão normal em diferentes planos.

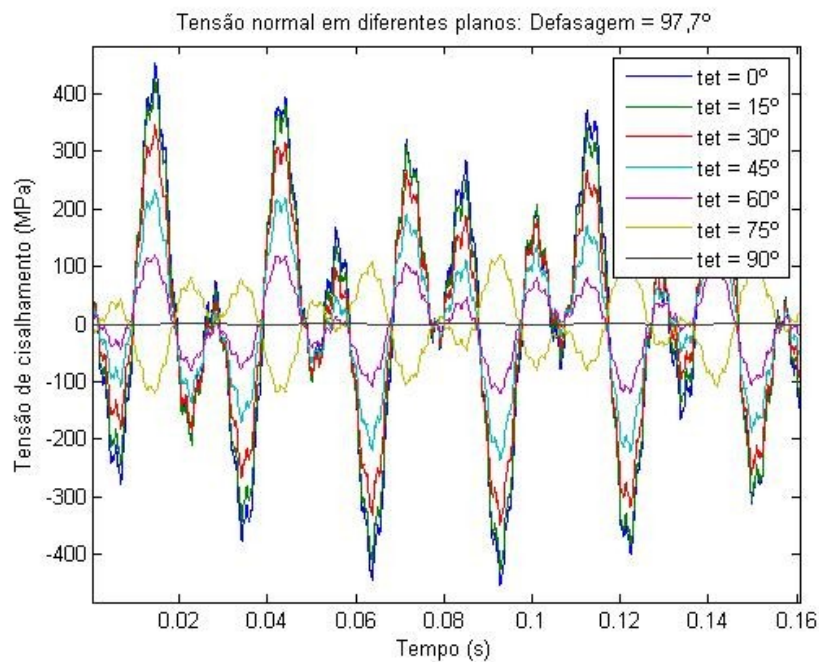


Figura 70: Ampliação da Figura 69.

A Figura 68 mostra que a máxima tensão de cisalhamento ocorre no plano inclinado a $\theta_p = 45^\circ$ em relação ao eixo do tubo. Nesse mesmo plano também ocorre a mínima tensão de cisalhamento.

A Figura 70 mostra que a máxima tensão normal ocorre em $\theta_p = 0^\circ$. A Tabela 12 mostra os valores máximos e mínimos de cada tensão relativos a essas direções.

Tabela 12: Máximas e mínimas tensões normais e de cisalhamento em diferentes direções.

θ_p (°)	$\sigma_{\text{máx}}$ (MPa)	$\sigma_{\text{mín}}$ (MPa)	$\Delta\sigma$ (MPa)	$\tau_{\text{máx}}$ (MPa)	$\tau_{\text{mín}}$ (MPa)	$\Delta\tau/2$ (MPa)
0	78,76	-78,73	157,49	52,45	-52,38	52,42
15	89,49	-87,95	177,44	53,56	-51,23	52,40
30	92,54	-91,99	184,53	44,46	-41,79	43,13
45	82,69	-80,72	163,41	39,38	-39,38	39,38
60	60,47	-57,85	118,32	53,11	-53,43	53,27
63,5	53,85	-51,51	105,36	55,44	-56,2	55,82
90	78,73	-78,76	157,49	52,38	-52,45	52,42

Calculando o parâmetro δ_{Findley} para cada ângulo θ , pode-se determinar se nessas condições, o tubo possui ou não vida infinita. As constantes de Findley são $\alpha_{\text{Findley}} = 0,1236$ e $\beta_{\text{Findley}} = 152,25 \text{ MPa}$. A Tabela 13 apresenta os valores encontrados.

Tabela 13: Parâmetro δ_{Findley} para diferentes direções θ_p .

θ_p (°)	LE_{Findley} (MPa)	δ_{Findley}
0	91,90	0,604
15	168,82	1,109
30	238,32	1,565
45	256,88	1,687
60	217,34	1,428
75	130,00	0,854
90	35,12	0,231

A Tabela 13 mostra que nas direções $\theta_p = 15, 30, 45$ e 60° o parâmetro $\delta_{\text{Findley}} > 1$, ou seja, nesses planos o tubo possui vida finita à fadiga. Nota-se ainda que, a direção $\theta_p = 45^\circ$ é a mais crítica por apresentar o maior parâmetro δ_{Findley} entre todos.

É fato que uma avaliação mais criteriosa a respeito da direção crítica, $\theta_{p \text{ crítico}}$, deve ser realizada para determinar com precisão a direção do plano crítico no ponto crítico da seção engastada do tubo.

Supondo que apenas a espessura da parede do tubo, t , pudesse ser alterada, pode-se determinar seu valor mínimo para que haja vida infinita na direção crítica $\theta_p = 45^\circ$. A Figura 71 mostra um gráfico com a variação do parâmetro $\delta_{Findley}(\theta_p = 45^\circ)$ em função da espessura e do tubo.

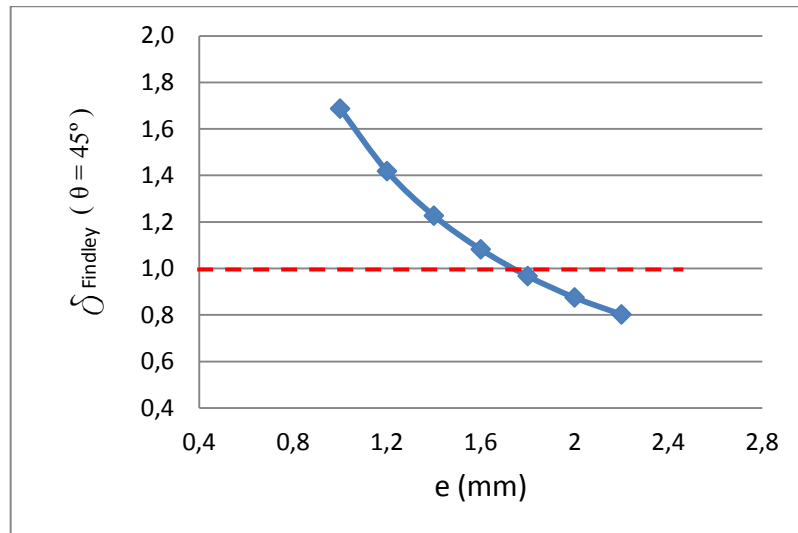


Figura 71: Variação do parâmetro $\delta_{Findley}$ em função da espessura do tubo e .

A Figura 71 mostra que, sem alterar qualquer outra propriedade do tubo, seu plano crítico $\theta = 45^\circ$, possui o parâmetro $\delta_{Findley} < 1$ para espessuras $e \geq 1,8\text{mm}$, aproximadamente. Portanto, para valores de $e \geq 1,8\text{mm}$, o tubo tem vida infinita sob fadiga na sua condição mais crítica.

Capítulo 5

Estudo de caso: Coluna de Perfuração de Poço de Petróleo Vertical

O estudo de caso apresentado a seguir tem como objetivo analisar o modelo dinâmico da coluna de perfuração de poço de petróleo vertical desenvolvido pela referência [9], aplicando os conceitos de fadiga multiaxial e verificando seu limite de vida em fadiga.

Portanto, cabe apenas ressaltar alguns pontos importantes definidos na análise dinâmica para então, apresentar seus resultados e aplicar alguma metodologia de fadiga multiaxial.

5.1 Modelo Dinâmico

Basicamente, considera-se que a coluna é formada por oito tubos de aço de seção circular, roscados entre si. Os sete primeiros são os drillpipes e, o último, o drillcollar, cada um com 125m de comprimento. A Figura 72 mostra o esquema de uma coluna de perfuração convencional.

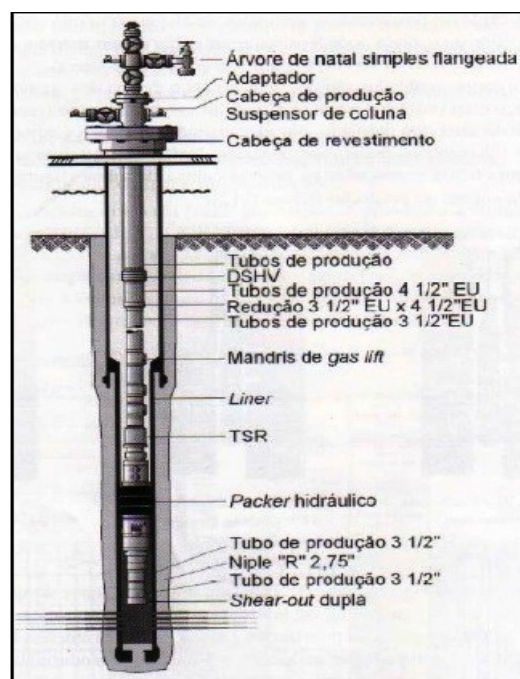


Figura 72: Esquema de uma coluna de perfuração de poço convencional [9].

Os carregamentos externos atuantes sobre a coluna são provenientes do contato entre a broca de perfuração e a formação rochosa do poço. Isso pode ser traduzido por uma carga axial e outra torcional. A coluna também deve sustentar seu peso próprio. Esse modelo desconsidera a flexão da coluna e seu amortecimento, além de adotar um modelo dinâmico desacoplado. A Figura 73 mostra o modelo *MEF* desenvolvido pela referência [9], e adotado nesse estudo de caso.



Figura 73: Modelo *MEF* da coluna de perfuração [9].

Como apenas forçamentos axiais e torcionais são admitidos nesse modelo, cada nó da malha de elementos finitos recebeu um grau de liberdade de deslocamento axial, ao longo do eixo longitudinal do elemento, e outro de deslocamento angular, em torno desse eixo. A Figura 73 associa os deslocamentos ímpares ($u_1, u_3, u_5, \dots, u_{17}$) com os GDL axiais e os pares ($u_2, u_4, u_6, \dots, u_{18}$) com os de torção.

Todos os parâmetros utilizados no modelo foram retirados da referência [9]. Os formatos dos carregamentos externos também foram retirados da referência [9], onde podem ser melhor entendidos. A Tabela 14 mostra os valores adotados para as variáveis consideradas mais relevantes na análise dinâmica da coluna de perfuração.

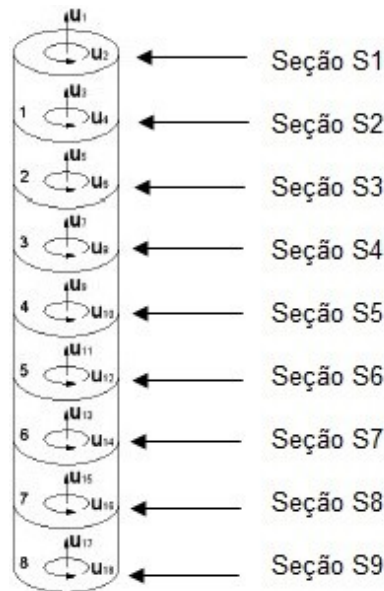
Tabela 14: Dados mais relevantes do problema.

Dados relevantes do problema	
WOB (lb)	3500
rot (rpm)	120
D_{broca} (pol)	8,5
K_{rocha} (N/m)	10^8

Onde WOB é o peso sobre a broca, rot é a rotação da coluna, D_{broca} é o diâmetro externo da broca e K_{rocha} é a rigidez da formação rochosa sobre a qual a broca atua.

5.2 – Análises de Tensão

Os estados de tensão para as diferentes seções da coluna de perfuração podem ser obtidos a partir da análise dinâmica. As seções foram definidas na interface entre os drillpipes, entre o drillpipe e o drillcollar e entre a broca de perfuração e o drillcollar. A Figura 74 mostra a numeração que foi adotada para representar cada seção.

**Figura 74:** Seções para análise de tensão da coluna.

A Figura 74 mostra que a seção S9 é a seção de interface entre o drillcollar e a broca de perfuração. O estudo de fadiga dessa seção é importante para avaliar o dano e o desgaste gerado sobre a broca.

Com relação à integridade estrutural da coluna, é importante realizar uma análise de fadiga no ponto crítico da seção crítica. Para isso, a Figura 75 mostra a variação da máxima tensão equivalente de von Mises em função do comprimento da coluna, onde na posição da seção igual a 0 m, encontra-se o drill pipe no topo da plataforma e na posição da seção igual a 1000 m, encontra-se o drill collar e a broca de perfuração em contato com o solo.

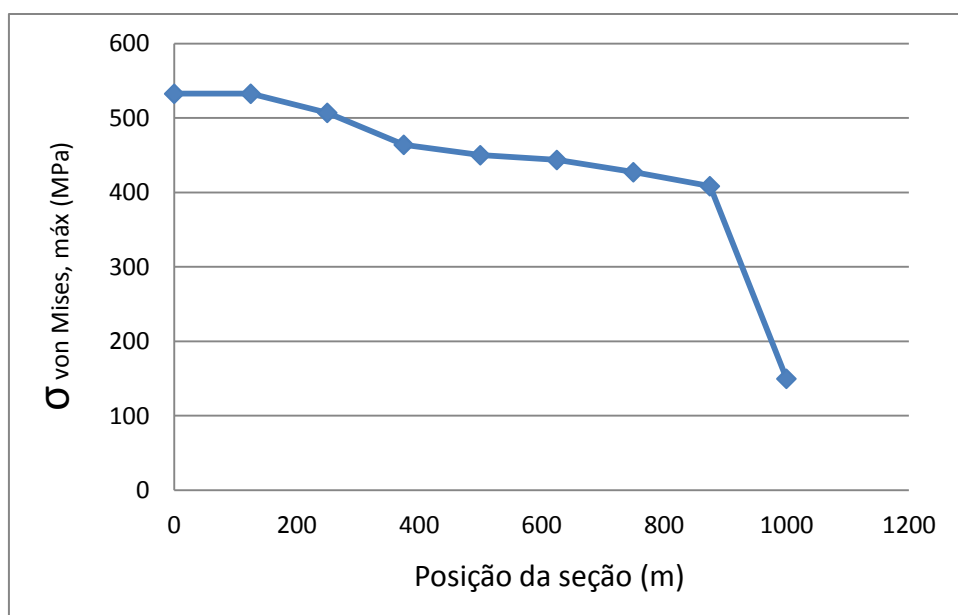


Figura 75: Variação da máxima tensão equivalente de von Mises.

A Figura 75 mostra que a variação da máxima tensão equivalente de von Mises é praticamente linear entre os drill pipes, quando sofre uma queda brusca quando passa para seção do drill collar. Essa mudança brusca se deve ao fato da seção transversal do drill collar ser maior do que a do drill pipe. Além disso, a Figura 75 mostra que a crítica é a S1, que fica no topo da plataforma. Sendo assim, essa seção também será avaliada contra fadiga.

5.3 - Análise de Fadiga Multiaxial da Seção S1

Como foi visto na seção anterior, a seção S1 localizada no 1º drill pipe é a seção crítica da coluna de perfuração para a condição imposta ao problema. A Figura 76 mostra o estado de tensão dessa seção ao longo do tempo.

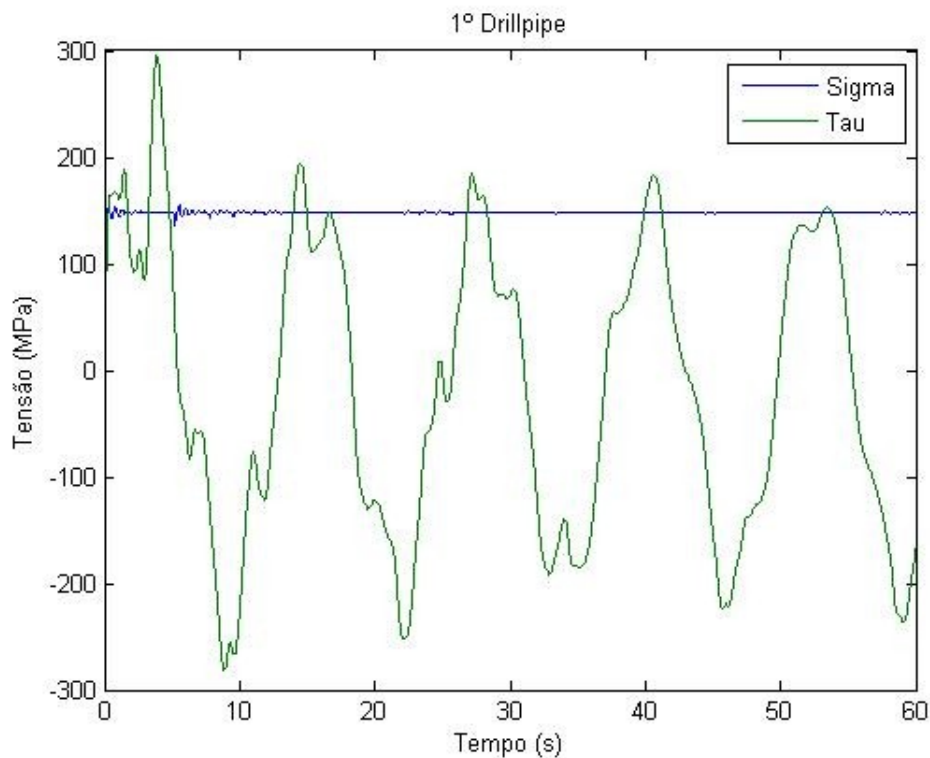


Figura 76: Estado de tensão do ponto crítico da seção S1.

A Figura 76 mostra que a tensão normal possui praticamente só tensão média, pois sua tensão alternada é muito pequena. No entanto, a tensão de cisalhamento possui uma variação não harmônica. Esse estado de tensão caracteriza um caso típico de fadiga multiaxial para carregamentos não proporcionais.

Portanto, uma análise de fadiga será realizada levando em consideração o critério de Findley associado com a regra para acúmulo de dano de Palmgren-Miner.

Para facilitar a análise, segue o passo a passo que deve ser realizado para quantificar o dano acumulado para essas condições de carregamento.

- I. Determine o intervalo de tempo que será contabilizado;
- II. Determine a direção do plano crítico;
- III. Realize a contagem de ciclos, segundo o método *rainflow*, separando as classes de carregamento;
- IV. Determine, para cada classe, o valor de $LE_{Findley}$;
- V. Na curva S-N do material, determine o número de ciclos N_i sob $LE_{Findley}$;
- VI. Calcule o dano acumulado, D;
- VII. Verifique se $D \leq 1/FS$.

Atendendo ao passo I, estimou-se o intervalo de tempo em 60 segundos para contabilizar o dano acumulado, conforme mostra a Figura 76.

Atendendo ao passo II, a Figura 77 mostra a variação da máxima tensão equivalente de von Mises em função da direção do plano principal θ_p .

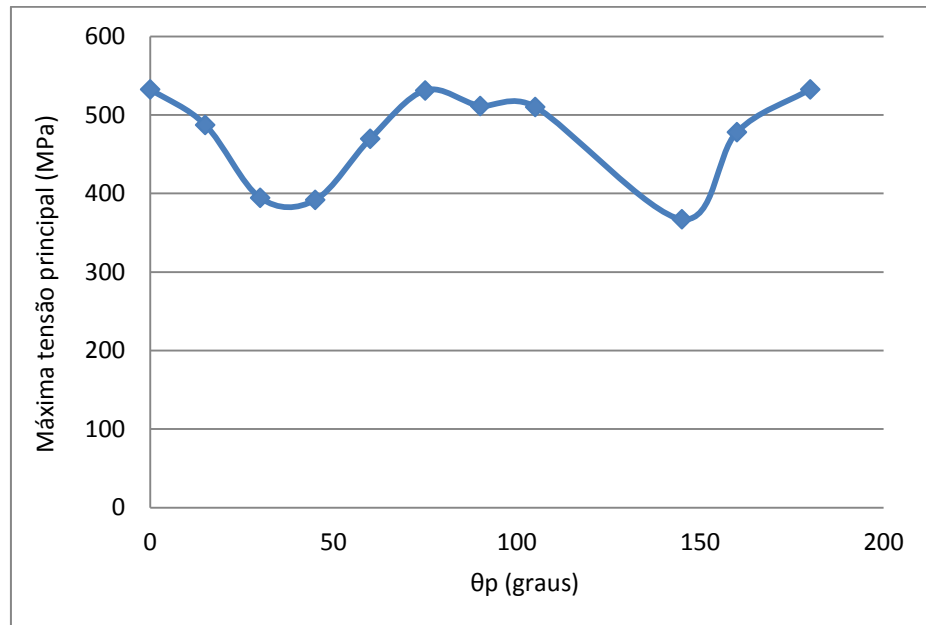


Figura 77: Estado de tensão do ponto crítico da seção S1.

A Figura 77 mostra que o plano crítico é o de $\theta_p = 0^\circ$ ou 180° . Dessa forma, o estado de tensão da Figura 76 será utilizado para o cálculo de fadiga, pois ele foi definido sobre o plano a 0° em relação ao eixo longitudinal da coluna, ou seja, em $\theta_p = 0^\circ$.

Atendendo ao passo III, a contagem de ciclos é realizada utilizando o método rainflow, abordado na seção 2.4.1. A Tabela 15 apresenta, por classe de carregamento, as tensões máximas e mínimas normais e de cisalhamento para as 12 classes encontradas. Considerou-se, de forma conservadora, que cada uma das classes apareceu com 1 ciclo no intervalo de tempo considerado. Nota-se que para todas as classes $\sigma_{máx} = 148,1 \text{ MPa}$.

Tabela 15: Classes de carregamento.

Classe	n_i (nº de ciclos)	$\sigma_{m\acute{a}x}$ (MPa)	$\Delta\tau_{m\acute{a}x}/2$ (MPa)
1	1	148,10	107,41
2	1		288,60
3	1		238,30
4	1		223,25
5	1		217,75
6	1		209,85
7	1		183,00
8	1		183,15
9	1		187,40
10	1		187,15
11	1		49,68
12	1		102,33

Atendendo ao passo IV, a Tabela 16 mostra os valores calculados de $LE_{Findley}$, para cada classe de carregamento. A Tabela 1 mostra que para o material do tubo, aço SAE 4340, o parâmetro de Findley é igual a $\alpha_{Findley} = 0,4167$.

Tabela 16: Parâmetro $LE_{Findley}$ por classe de carregamento.

Classe	$LE_{Findley}$ (MPa)
1	192,86
2	268,36
3	247,40
4	241,13
5	238,84
6	235,54
7	224,36
8	224,42
9	226,19
10	226,09
11	168,80
12	190,74

Atendendo ao passo V, estima-se a curva S-N do material do tubo SAE 4340 utilizando a Equação (156), pois os parâmetros de Basquin estão bem definidos na referência [15], sendo $\sigma_f' = 1917 \text{ MPa}$ e $b = -0,099$. A Figura 78 mostra a estimativa da curva S-N do aço SAE 4340.

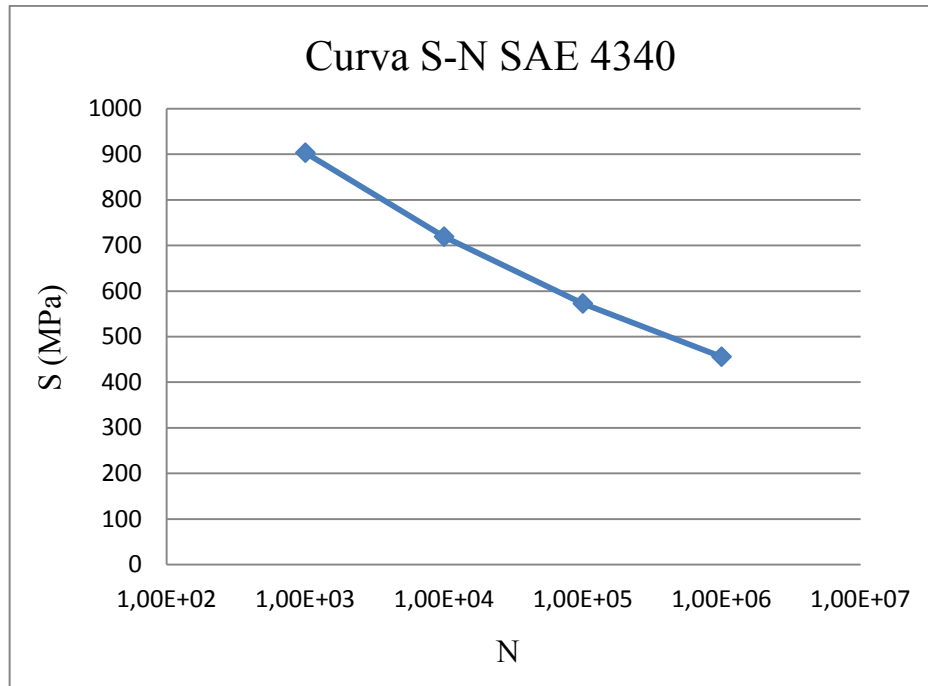


Figura 78: Curva S-N estimada para o SAE 4340.

A Tabela 17 apresenta o número de ciclos N_i para cada classe de carregamento.

Tabela 17: Número de ciclos para falha

Classe	$LE_{Findley}$ (MPa)	N_i
1	192,86	$5,94 \cdot 10^9$
2	268,36	$2,11 \cdot 10^8$
3	247,40	$4,80 \cdot 10^8$
4	241,13	$6,22 \cdot 10^8$
5	238,84	$6,85 \cdot 10^8$
6	235,54	$7,88 \cdot 10^8$
7	224,36	$1,29 \cdot 10^9$
8	224,42	$1,28 \cdot 10^9$
9	226,19	$1,19 \cdot 10^9$
10	226,09	$1,19 \cdot 10^9$
11	168,80	$2,28 \cdot 10^{10}$
12	190,74	$6,64 \cdot 10^9$

O passo VI é realizado considerando que a sequência de carregamentos apresentada na Figura 76 sempre acontece a cada 60 segundos.

A Tabela 18 apresenta o dano por classe de carregamento, bem como o dano acumulado para o intervalo de tempo de 60s.

Tabela 18: Resultados para o acúmulo de dano total e por classe de carregamento.

Classe	n_i/N_i
1	$1,68417 \cdot 10^{-9}$
2	$4,73945 \cdot 10^{-9}$
3	$2,08439 \cdot 10^{-9}$
4	$1,60821 \cdot 10^{-9}$
5	$1,46032 \cdot 10^{-9}$
6	$1,2693 \cdot 10^{-9}$
7	$7,76387 \cdot 10^{-10}$
8	$7,78574 \cdot 10^{-10}$
9	$8,42912 \cdot 10^{-10}$
10	$8,38999 \cdot 10^{-10}$
11	$4,38461 \cdot 10^{-11}$
12	$1,5065 \cdot 10^{-10}$
$D = \sum n_i/N_i$	
$1,47615 \cdot 10^{-8}$	

O dano acumulado $D = 1,47615 \cdot 10^{-8}$ é utilizado como referência para o cálculo do acúmulo de dano para outras condições. Para verificar a vida infinita do tubo nessa situação, verifica-se o dano resultante caso $\sum n_1 = 10^6$ *ciclos*.

Nesse caso, o novo dano acumulado vale $D(\sum n_1 = 10^6 \text{ ciclos}) = 0,00123$. Dessa forma, atendendo ao passo VII e considerando $FS = 1,5$, então:

$$0,00123 \leq (1/FS = 1/1,5) = 0,67 \quad (168)$$

Logo, como o dano acumulado é menor do que $1/FS$, o tubo possui vida infinita sob fadiga multiaxial nessas condições.

Outra forma de avaliar seria calculando o número de ciclos com o inverso do dano acumulado, Equação 169.

$$N = \frac{1}{D} = \frac{1}{1,47615 \cdot 10^{-8}} = 6,774 \cdot 10^7 \text{ ciclos} \quad (169)$$

Como $N > 10^7$ então o tubo tem vida infinita sob fadiga nessas condições.

Capítulo 6

Conclusões e Sugestões

Após a realização de diversos estudos, pode-se concluir que:

- a) Os estados de tensão gerados por forçamentos de natureza harmônica não possuem perfis perfeitamente harmônicos;
- b) O modo normal de vibração crítico do tubo estudado será sempre o primeiro, pois apresenta o pior estado de tensão na seção crítica quando comparado com os demais;
- c) A mudança da frequência de forçamento sempre altera o estado de tensão das seções do tubo;
- d) Forçamentos combinados com frequências diferentes sempre apresentam estados de tensão fora de fase;
- e) Tanto as frequências naturais quanto os modos normais de vibração para o caso de elementos com forçamentos combinados, são formados pelas respectivas frequências naturais e modos normais de vibração de cada tipo de forçamento separadamente, ou seja, não há uma dependência de um em relação ao outro;
- f) Carregamentos axiais e torcionais não defasados por um ângulo qualquer e com a mesma frequência, são proporcionais, e com frequências distintas, são não proporcionais;
- g) O carregamento transversal sempre se combina com outro carregamento de forma não proporcional;
- h) O aumento do limite de resistência à tração do material diminui o parâmetro δ_{Sines} ;
- i) O aumento da espessura do tubo, e , diminui o parâmetro $\delta_{Findley}$.

Como sugestão para futuros trabalhos:

- a) Aplicar alguns critérios de fadiga multiaxial baseados em deformação e energia;
- b) Comparar o critério de fadiga multiaxial baseado em tensão com os demais critérios;
- c) Fazer o acúmulo de dano para a seção S9 da coluna do estudo de caso.

Referências Bibliográficas

- [1] ROSA, E., *Análise de resistência mecânica – Mecânica da fratura e fadiga*, Universidade Federal de Santa Catarina, 2002.
- [2] MERIAM, J. L., KRAIGE, L. G.; *Estática*, LTC, 6ª Ed., 2009.
- [3] RAO, SINGIRESU S; *Vibrações Mecânicas*, Pearson Prentice Hall, 4ª ed., São Paulo, 2008.
- [4] KELLY, S.G.; *Mechanical Vibrations – Theory and applications*, Cengage Learning, SI ed., 2012.
- [5] IWAN, W. D., BLEVINS, R. D., *A model for vortex induced oscillation of structures*, Journal of applied mechanics, v. 41, n. 3, 1974.
- [6] HIBBELER, R. C.; *Resistência dos Materiais*, Pearson Prentice Hall, 5ª ed., 2010.
- [7] MEIROVITCH, L.; *Elements of Vibration Analysis*, McGraw-Hill, 2ª ed., 1986.
- [8] SITE: <http://engenhariacivilonline.blogspot.com.br/2011/05/ponte-akashi-kaikyo.html>.
- [9] FLACH, L. M., COUTINHO, P. P., GACHET, R. F., *Análise dinâmico-estrutural de colunas de perfuração de poços de petróleo*, Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, Projeto de fim de curso, 2013.
- [10] LOPES, M. A., *Aplicação de critérios de fadiga multiaxial para componente veicular*, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Projeto de fim de curso, 2013.
- [11] LOURO, J. M. S. M., *Avaliação do dano acumulado gerado por sequências de carregamentos biaxiais na vida à fadiga no aço 42CrMo4*, Universidade técnica de Lisboa, 2010.
- [12] SOCIE, D. F., MARQUIS, G.B., *Multiaxial Fatigue*, 1ª ed., 2000.
- [13] PINHEIRO, P. A. B., *Análise crítica de modelos de fadiga de plano crítico e proposta de uma nova medida de amplitude da tensão cisalhante*, Universidade de Brasília, Projeto de fim de curso, 2012.
- [14] CASTRO, J. T. P., MEGGIOLARO, M. A., *Técnicas e práticas de dimensionamento estrutural sob cargas reais de serviço*, Vol. I, 2009.
- [15] STEPHENS, R. I., FATEMI, A., STEPHENS, R. R., FUCHS, H. O.; *Metal Fatigue in engineering*, 2ª ed., 2001.
- [16] NISBETT, J. K., BUDYNAS, R. G., *Elementos de máquinas de Shigley*, 8ª ed., 2011.
- [17] REIS, L., ANES, V., LI, B., FREITAS, M., *Efeito da sequência de cargas axial e de torção na previsão de vida em fadiga multiaxial*, Revista da associação portuguesa de análise experimental de tensões, 2011.

APÊNDICE

APÊNDICE A: Programa para análise dinâmica de vibração axial.

```

%
clear
close all
global a r wf Q
%
% Dados Geométricos da Barra
%
L0 = 1.2 ; % Comprimento total do tubo (m)
de = 0.1; % Diâmetro externo do tubo (m)
e = 0.001; % Espessura do tubo (m)
di = de - 2*e; % Diâmetro interno (m)
A = (pi/4)*(de^2 - di^2); % Área da seção transversal do tubo (m^2)
Ro = 7800; % Massa específica do material do tubo (Kg/m^3)
E = 207*(10^9); % Módulo de elasticidade do material do tubo (N/m^2)
%
% Dados dos elementos finitos
%
z = 3 ; % Número de elementos
l = L0/z; % Comprimento de cada elemento
%
% Dados do forçamento
%
F0 = 10000; % Amplitude do forçamento N
wf = 200; % Frequência do forçamento rad/s
%
% Constantes do amortecimento proporcional
%
alfa = 0;
beta = 0;
%
% Dados da integração
%
t1 = 0; % Instante inicial de integração
t2 = 1; % Instante final de integração
%
% Definição das matrizes de massa e rigidez globais
%
% Matriz de transformação
%
S1 = [0 0 0; 1 0 0]; % Matriz de transformação do elemento 1
S2 = [1 0 0; 0 1 0]; % Matriz de transformação do elemento 2
S3 = [0 1 0; 0 0 1]; % Matriz de transformação do elemento 3
%
% Transposta da matriz de transformação
%
S1T = transpose (S1);
S2T = transpose (S2);
S3T = transpose (S3);
%
% Matriz de massa local
%
cm = (Ro*A*l)/6; % Coeficiente da matriz de massa(Kg)
m = cm*[2 1; 1 2]; % Matriz de massa local (Kg)

```

```

%
% Matriz de massa global de cada elemento (Kg)
%
M1 = S1T*m*S1;
M2 = S2T*m*S2;
M3 = S3T*m*S3;
%
% Matriz de Massa Global do sistema (Kg)
%
M = M1 + M2 + M3;
%
%
IM = inv(M); % Inversa da Matriz de massa Global
%
% Rigidez local
%
cr = (E*A)/(l); % Coeficiente da matriz de rigidez (N/m)
k = cr*[1 -1; -1 1]; % Matriz de rigidez local (N/m)
%
% Matriz de rigidez global de cada elemento (N/m)
%
K1 = S1T*k*S1;
K2 = S2T*k*S2;
K3 = S3T*k*S3;
%
% Matriz de Rigidez Global do sistema (N/m)
%
K = K1 + K2 + K3;
%
% Cálculo dos autovalores e autovetores
%
[V,D] = eig(K,M); % Autovetores V e Autovalores D
FN = sqrt(D); % Frequências naturais (rad/s)
fn = FN/(2*pi); % Frequências naturais (Hz)
MN = V; % Modos normais de vibração
%
% Matriz de amortecimento
%
C = alfa*M + beta*K;
%
% Vetor Forçamento local de cada elemento (N)
%
q1 = [0;0;0];
q2 = [0;0;0];
q3 = [0;0;F0];
%
% Vetor Forçamento Global (N)
%
Q = q1 + q2 + q3;
%
% Análise computacional - Integrador
%
a = [zeros(3) eye(3);-IM*K -IM*C];
r = [zeros(3,3);IM];
y0 = zeros(1,6); % Condições iniciais (3 deslocamentos iniciais iguais
% a zero (3 primeiros) e 3 velocidades iniciais iguais a zero (3 últimos)
tspan = [t1 t2]; % Intervalo de tempo para a integração das equações
[t,y] = ode45('equa4',tspan,y0);
n = length (t);
%
% Resultados dos deslocamentos

```

```

%
u2=y(1:n,1);
u3=y(1:n,2);
u4=y(1:n,3);
%
% Resultados das velocidades
%
v2=y(1:n,4);
v3=y(1:n,5);
v4=y(1:n,6);
%
% Análise de tensões
%
% Tensões calculadas na seção do nó 2 do elemento 1
%
sigma_2 = -(E/l)*u2;
%
% Tensões calculadas na seção do nó 3 do elemento 2
%
sigma_3 = -(E/l)*(u3 - u2);
%
% Tensões calculadas na seção do nó 4 do elemento 3
%
sigma_4 = -(E/l)*(u4 - u3);
%
% Gráficos com os resultados
%
figure(1)
plot(t, (sigma_2)/1000000),title('Seção transversal do nó 2')
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Tensão (MPa)')
%
figure(2)
plot(t, (sigma_3)/1000000),title('Seção transversal do nó 3')
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Tensão (MPa)')
%
figure(3)
plot(t, (sigma_4)/1000000),title('Seção transversal do nó 4')
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Tensão (MPa)')

*****

function yp = equa4(t,y)

global a r wf Q

F1 = sin(wf*t);
Q2 = F1*Q;

yp = a*y + r*Q2;

```

APÊNDICE B: Programa para análise dinâmica de vibração torcional.

```

%
clear
close all
global a r wf Q
%
L0 = 1.2 ; % Comprimento total do tubo (m)
de = 0.1; % Diâmetro externo do tubo (m)
e = 0.001; % Espessura do tubo (m)
di = de - 2*e; % Diâmetro interno do tubo (m)
A = (pi/4)*(de^2 - di^2); % Área da seção transversal do tubo (m^2)
J = (pi/32)*(de^4 - di^4); % Momento polar de inércia (m^4)
c = de/2; % Região de máxima tensão de cisalhamento (m)
Ro = 7800; % Massa específica do material do tubo (Kg/m^3)
G = 70*(10^9); % Módulo de elasticidade transversal do material do tubo
(N/m^2)
%
% Dados dos elementos finitos
%
z = 3 ; % Número de elementos
l = L0/z; % Comprimento de cada elemento
%
% Dados do forçamento
%
T0 = 500; % Amplitude do forçamento (N.m)
wf = 200; % Frequência do forçamento (rad/s)
%
% Constantes do amortecimento proporcional
%
alfa = 0;
beta = 0;
%
% Dados da integração
%
t1 = 0; % Instante inicial de integração
t2 = 1; % Instante final de integração
%
% Definição das matrizes de massa e rigidez globais
%
% Matriz de transformação
%
S1 = [0 0 0; 1 0 0]; % Matriz de transformação do elemento 1
S2 = [1 0 0; 0 1 0]; % Matriz de transformação do elemento 2
S3 = [0 1 0; 0 0 1]; % Matriz de transformação do elemento 3
%
% Transposta da matriz de transformação
%
S1T = transpose (S1);
S2T = transpose (S2);
S3T = transpose (S3);
%
% Matriz de massa local
%
cm = (Ro*J*l)/6; % Coeficiente da matriz de massa à torção(Kg.m^2)
m = cm*[2 1; 1 2]; % Matriz de massa local à torção (Kg.m^2)
%
% Matriz de massa global de cada elemento
%
M1 = S1T*m*S1;
M2 = S2T*m*S2;
M3 = S3T*m*S3;
%

```

```

% Matriz de Massa Global do sistema
%
M = M1 + M2 + M3;
%
%
IM = inv(M); % Inversa da Matriz de massa Global
%
% Rigidez local
%
cr = (G*J)/(l); % Coeficiente da matriz de rigidez à torção (N.m/rad)
k = cr*[1 -1; -1 1]; % Matriz de rigidez local (N.m/rad)
%
% Matriz de rigidez global de cada elemento
%
K1 = S1T*k*S1;
K2 = S2T*k*S2;
K3 = S3T*k*S3;
%
% Matriz de Rigidez Global do sistema
%
K = K1 + K2 + K3;
%
% Cálculo dos autovalores e autovetores
%
[V,D] = eig(K,M); % Autovetores V e Autovalores D
FN = sqrt(D); % Frequências naturais (rad/s)
fn = FN/(2*pi); % Frequências naturais (Hz)
MN = V; % Modos normais de vibração
%
% Matriz de amortecimento
%
C = alfa*M + beta*K;
%
% Vetor Forçamento local de cada elemento (N.m)
%
q1 = [0;0;0];
q2 = [0;0;0];
q3 = [0;0;T0];
%
% Vetor Forçamento Global (N.m)
%
Q = q1 + q2 + q3;
%
% Análise computacional - Integrador
%
a = [zeros(3) eye(3);-IM*K -IM*C];
r = [zeros(3,3);IM];
y0 = zeros(1,6); % Condições iniciais (3 deslocamentos iniciais iguais
%a zero (3 primeiros) e 3 velocidades iniciais iguais a zero % (3 últimos)
tspan = [t1 t2]; % Intervalo de tempo para a integração das equações
[t,y] = ode45('equa3',tspan,y0);
n = length (t);
%
% Resultados deslocamento (rad)
%
u2=y(1:n,1);
u3=y(1:n,2);
u4=y(1:n,3);
%
% Resultados de velocidade (rad/s)
%

```

```

v2=y(1:n,4);
v3=y(1:n,5);
v4=y(1:n,6);
%
% Análise de tensões
%
% Tensões calculadas na seção do nó 2 do elemento 1
%
tau_2 = -(G*c/l)*u2;
%
% Tensões calculadas na seção do nó 3 do elemento 2
%
tau_3 = -(G*c/l)*(u3 - u2);
%
% Tensões calculadas na seção do nó 4 do elemento 3
%
tau_4 = -(G*c/l)*(u4-u3);
%
% Gráficos com os resultados
%
figure(1)
plot(t, (tau_2)/1000000),title('Seção transversal do nó 2')
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Tensão (MPa)')
%
figure(2)
plot(t, (tau_3)/1000000),title('Seção transversal do nó 3')
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Tensão (MPa)')
%
figure(3)
plot(t, (tau_4)/1000000),title('Seção transversal do nó 4')
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Tensão (MPa)')

*****

function yp = equa3(t,y)

global a r wf Q

T1 = sin(wf*t);
Q2 = T1*Q;

yp = a*y + r*Q2;

```

APÊNDICE C: Programa para análise dinâmica de vibração transversal.

```

%
clear
close all
global a r wf Q
%
L0 = 1.2 ; % Comprimento total do tubo (m)
de = 0.1; % Diâmetro externo do tubo (m)
e = 0.001; % Espessura do tubo (m)

```



```

di = de - 2*e; % Diâmetro interno (m)
A = (pi/4)*(de^2 - di^2); % Área da seção transversal (m^2)
Iy = (pi/64)*(de^4 - di^4); % Momento de inércia de área em torno do eixo y
(m^4)
c = de/2; % Região de máxima tensão normal (m)
Ro = 7800; % Massa específica do material do tubo (Kg/m^3)
E = 207*(10^9); % Módulo de elasticidade Transversal do material do tubo
(N/m^2)
%
% Dados dos elementos finitos
%
z = 3 ; % Número de elementos
l = L0/z; % Comprimento de cada elemento
%
% Dados do forçamento
%
F0 = 1000; % Amplitude do forçamento N
wf = 200; % Frequência do forçamento rad/s
%
% Constantes do amortecimento proporcional
%
alfa = 0;
beta = 0;
%
% Dados da integração
%
t1 = 0; % Instante inicial de integração
t2 = 1; % Instante final de integração
%
% Definição das matrizes de massa e rigidez globais
%
% Matriz de transformação
%
S1 = [0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0; 1 0 0 0 0 0; 0 1 0 0 0 0]; % Matriz de
transformação do elemento 1
S2 = [1 0 0 0 0 0; 0 1 0 0 0 0; 0 0 1 0 0 0; 0 0 0 1 0 0]; % Matriz de
transformação do elemento 2
S3 = [0 0 1 0 0 0; 0 0 0 1 0 0; 0 0 0 0 1 0; 0 0 0 0 0 1]; % Matriz de
transformação do elemento 3
%
% Transposta da matriz de transformação
%
S1T = transpose (S1);
S2T = transpose (S2);
S3T = transpose (S3);
%
% Matriz de massa local
%
cm = (Ro*A*l)/420; % Coeficiente da matriz de massa (Kg)
m = cm*[156 22*l 54 -13*l; 22*l 4*l*l 13*l -3*l*l; 54 13*l 156 -22*l;
-13*l -3*l*l -22*l 4*l*l]; % Matriz de massa local (Kg)
%
% Matriz de massa global de cada elemento
%
M1 = S1T*m*S1;
M2 = S2T*m*S2;
M3 = S3T*m*S3;
%
% Matriz de Massa Global do sistema
%
M = M1 + M2 + M3;

```

```

%
IM = inv(M); % Inversa da Matriz de massa Global
%
% Rigidez local
%
cr = (E*Iy)/(l^3); % Coeficiente da matriz de rigidez local (N/m)
k = cr*[12 6*l -12 6*l; 6*l 4*l*l -6*l 2*l*l; -12 -6*l 12 -6*l;
        6*l 2*l*l -6*l 4*l*l]; % Matriz de rigidez local (N/m)
%
% Matriz de rigidez global de cada elemento
%
K1 = S1T*k*S1;
K2 = S2T*k*S2;
K3 = S3T*k*S3;
%
% Matriz de Rigidez Global do sistema
%
K = K1 + K2 + K3;
%
% Cálculo dos autovalores e autovetores
%
[V,D] = eig(K,M); % Autovetores V e Autovalores D
FN = sqrt(D); % Frequências naturais (rad/s)
fn = FN/(2*pi); % Frequências naturais (Hz)
MN = V; % Modos normais de vibração
%
% Matriz de amortecimento
%
C = alfa*M + beta*K;
%
% Vetor Forçamento global de cada elemento (N)
%
q1 = [0;0;0;0;0;0];
q2 = [0;0;0;0;0;0];
q3 = [0;0;0;0;F0;0];
%
% Vetor Forçamento Global (N)
%
Q = q1 + q2 + q3;
%
% Análise computacional - Integrador
%
a = [zeros(6) eye(6);-IM*K -IM*C];
r = [zeros(6,6);IM];
y0 = zeros(1,12); % Condições iniciais (6 deslocamentos iniciais iguais
%a zero (6 primeiros) e 6 velocidades iniciais iguais a zero (6 últimos)
tspan = [t1 t2]; % Intervalo de tempo para a integração das equações
[t,y] = ode45('equa_4',tspan,y0);
n = length (t);
%
% Resultados deslocamento
%
u3=y(1:n,1);
u4=y(1:n,2);
u5=y(1:n,3);
u6=y(1:n,4);
u7=y(1:n,5);
u8=y(1:n,6);
%
% Resultados de velocidade
%

```

```

v3=y(1:n,7);
v4=y(1:n,8);
v5=y(1:n,9);
v6=y(1:n,10);
v7=y(1:n,10);
v8=y(1:n,12);
%
% Análise de tensões
%
% Tensões calculadas na seção do nó 1 do elemento 1
%
sigma1_ele1 = E*c*((6*u3/(l^2))+(-2*u4/l));
%
% Tensões calculadas na seção do nó 2 do elemento 2
%
sigma2_ele2 = E*c*((-6*u3/(l^2))+(-4*u4/l)+(6*u5/(l^2))+(-2*u6/l));
%
% Tensões calculadas na seção do nó 3 do elemento 3
%
sigma3_ele3 = E*c*((-6*u5/(l^2))+(-4*u6/l)+(6*u7/(l^2))+(-2*u8/l));
%
% Gráficos com os resultados
%
figure(1)
plot(t,(sigma1_ele1)/(10^6)),title('Seção transversal do nó 1')
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Tensão (MPa)')
%
figure(2)
plot(t,(sigma2_ele2)/(10^6)),title('Seção transversal do nó 2')
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Tensão (MPa)')
%
figure(3)
plot(t,(sigma3_ele3)/(10^6)),title('Seção transversal do nó 3')
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Tensão (MPa)')

*****

function yp = equa_4(t,y)

global a r wf Q

F1 = sin(wf*t);
Q2 = F1*Q;

yp = a*y + r*Q2;

```

APÊNDICE D: Programa para análise dinâmica de vibração axial e torcional.

```

%
clear
close all
global a r wfa wft Q1 Q2

```

```

%
L0 = 1.2 ; % Comprimento total do tubo (m)
de = 0.1; % Diâmetro externo do tubo (m)
e = 0.001; % Espessura do tubo (m)
di = de - 2*e; % Diâmetro interno (m)
A = (pi/4)*(de^2 - di^2); % Área da seção transversal (m^2)
J = (pi/32)*(de^4 - di^4); % Momento polar de inércia (m^4)
c = de/2; % Região de máxima tensão de cisalhamento (m)
Ro = 7800; % Massa específica do material do tubo (Kg/m^3)
E = 207*(10^9); % Módulo de elasticidade do material do tubo (N/m^2)
G = 70*(10^9); % Módulo de elasticidade transversal do material do tubo
(N/m^2)
%
% Dados dos elementos finitos
%
z = 3 ; % Número de elementos
l = L0/z; % Comprimento de cada elemento
%
% Intervalo de integração
%
t1 = 0;
t2 = 1;
%
% Dados do forçamento
%
F0 = 10000; % Amplitude do forçamento Axial (N)
T0 = 500; % Amplitude do forçamento Torçor (N.m)
%
% Frequência de forçamento
%
wfa = 200; % Frequência de forçamento axial (rad/s)
wft = 200; % Frequência de forçamento torcional(rad/s)
%
% Coeficientes da matriz de amortecimento proporcional
%
alfa = 0;
beta = 0;
%
% Matriz de Massa
%
cm_A = (Ro*A*l)/6; % Coeficiente da matriz de massa axial(Kg)
cm_T = (Ro*J*l)/6; % Coeficiente da matriz de massa à torção(Kg.m^2)
%
% Matriz Global de Massa
%
M_axial_torcao = [4*cm_A 0 cm_A 0 0 0; 0 4*cm_T 0 cm_T 0 0; cm_A 0 4*cm_A 0
cm_A 0; 0 cm_T 0 4*cm_T 0 cm_T;
0 0 cm_A 0 2*cm_A 0; 0 0 0 cm_T 0 2*cm_T];
%
IM = inv(M_axial_torcao); % Inversa da Matriz Global de Massa
%
% Matriz de Rigidez
%
cr_A = (E*A)/(l); % Coeficiente da matriz de rigidez axial (N/m)
cr_T = (G*J)/(l); % Coeficiente da matriz de rigidez à torção (N.m/rad)
%
% Matriz Global de Rigidez
%
K_axial_torcao = [2*cr_A 0 -cr_A 0 0 0; 0 2*cr_T 0 -cr_T 0 0; -cr_A 0
2*cr_A 0 -cr_A 0;
0 -cr_T 0 2*cr_T 0 -cr_T; 0 0 -cr_A 0 cr_A 0; 0 0 0 -cr_T 0 cr_T];

```

```

%
% Matriz de Amortecimento
%
C_axial_torca = alfa*M_axial_torca + beta*K_axial_torca;
%
% Cálculo dos autovalores e autovetores
%
[V,D] = eig(K_axial_torca,M_axial_torca); % Autovetores V e Autovalores D
FN = sqrt(D); % Freqüências naturais (rad/s)
fn = FN/(2*pi); % Freqüências naturais (Hz)
MN = V; % Modos normais de vibração
%
% Vetor Forçamento global de cada elemento forçamento
%
Q1 = [0;0;0;0;F0;0]; % (N)
Q2 = [0;0;0;0;0;T0]; % (N.m)
%
% Análise computacional - Integrador
%
a = [zeros(6) eye(6);-IM*K_axial_torca -IM*C_axial_torca];
r = [zeros(6,6);IM];
y0 = zeros(1,12); % Condições iniciais - 6 deslocamentos iniciais iguais
% a zero (6 primeiros) e 6 velocidades iniciais iguais a zero(6 últimos)
tspan = [t1 t2]; % Intervalo de tempo para a integração das equações
[t,y] = ode45('equa3',tspan,y0);
n = length (t);
%
% Resultados deslocamento
%
u3=y(1:n,1);
u4=y(1:n,2);
u5=y(1:n,3);
u6=y(1:n,4);
u7=y(1:n,5);
u8=y(1:n,6);
%
% Resultados de velocidade
%
v3=y(1:n,7);
v4=y(1:n,8);
v5=y(1:n,9);
v6=y(1:n,10);
v7=y(1:n,11);
v8=y(1:n,12);
%
% Análise de tensões
%
% Tensões calculadas na seção do nó 2 do elemento 1
%
tau_2 = -(G*c/l)*u4; % Tensão de cisalhamento
sigma_2 = -(E/l)*u3; % Tensão normal
sigma_eq_2 = sqrt(sigma_2.^2 + 3*(tau_2.^2)); % Tensão equivalente de Von
Mises
%
% RESULTADOS
%
figure(1)
plot(t,sigma_2,'b',t,tau_2,'r'),title('Seção transversal do nó 2')
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Tensão (MPa)')
Legend('Sigma (axial) ','Tau (torção)')

```

```

figure(2)
plot(t,sigma_eq_2),title('Tensão Equivalente de Von Mises na seção do nó
2')
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Tensão (MPa)')

```

```

*****

```

```

function yp = equa3(t,y)

global a r wfa wft Q1 Q2

F1 = sin(wfa*t);
Q3 = F1*Q1;
T1 = sin(wft*t);
Q4 = T1*Q2;

Q5 = Q3 + Q4; % Vetor forçamento global

yp = a*y + r*Q5;

```

APÊNDICE E: Programa para análise dinâmica de vibração transversal e torcional.

```

%
clear
close all
global a r wff wft Q1 Q2
%
L0 = 1.2 ; % Comprimento total do tubo (m)
de = 0.1; % Diâmetro externo do tubo (m)
e = 0.001; % Espessura do tubo (m)
di = de - 2*e; % Diâmetro internodo tubo (m)
A = (pi/4)*(de^2 - di^2); % Área da seção transversal (m^2)
J = (pi/32)*(de^4 - di^4); % Momento Polar de inércia(m^4)
Iy = (pi/64)*(de^4 - di^4); % Momento de inércia de área em torno do eixo y
(m^4)
c = de/2; % Região de máxima tensão normal e de cisalhamento (m)
Ro = 7800; % Massa específica do material do tubo (Kg/m^3)
E = 207*(10^9); % Módulo de elasticidade do material do tubo (N/m^2)
G = 70*(10^9); % Módulo de elasticidade transversal do material do tubo
(N/m^2)
%
% Dados dos elementos finitos
%
z = 3 ; % Número de elementos
l = L0/z; % Comprimento de cada elemento
%
% Intervalo de integração
%
t1 = 0;
t2 = 1;
%

```

```

% Dados do forçamento
%
Q0 = 10000; % Amplitude do forçamento Axial (N)
T0 = 500; % Amplitude do forçamento Torçor (Nm)
%
% Frequencia de forçamento
%
wff = 200; % Frequência de forçamento transversal (rad/s)
wft = 200; % Frequência de forçamento torcional (rad/s)
%
% Coeficientes da matriz de amortecimento proporcional
%
alfa = 0;
beta = 0;
%
% Matriz de Massa
%
cm_F = (Ro*A*1)/420; % Coeficiente da matriz de massa à flexão(Kg)
cm_T = (Ro*J*1)/6; % Coeficiente da matriz de massa à torção(Kg.m^2)
%
% Matriz Global de Massa
%
M_flexao_torcao = [312*cm_F 0 0 54*cm_F -13*1*cm_F 0 0 0 0; 0 8*1*1*cm_F 0
13*1*cm_F -3*1*1*cm_F 0 0 0 0;
0 0 4*cm_T 0 0 cm_T 0 0 0; 54*cm_F 13*1*cm_F 0 312*cm_F 0 0 54*cm_F -
13*1*cm_F 0; -13*1*cm_F -3*1*1*cm_F 0 0 8*1*1*cm_F 0 13*1*cm_F -3*1*1*cm_F
0;
0 0 cm_T 0 0 4*cm_T 0 0 cm_T; 0 0 0 54*cm_F 13*1*cm_F 0 156*cm_F -
22*1*cm_F 0;
0 0 0 -13*1*cm_F -3*1*1*cm_F 0 -22*1*cm_F 4*1*1*cm_F 0; 0 0 0 0 0 cm_T
0 0 2*cm_T];
%
IM = inv(M_flexao_torcao); % Inversa da Matriz de massa Global
%
% Matriz de Rigidez
%
cr_F = (E*Iy)/(l^3); % Coeficiente da matriz de rigidez axial (N/m)
cr_T = (G*J)/(l); % Coeficiente da matriz de rigidez à torção (N.m/rad)
%
% Matriz Global de Rigidez
%
K_flexao_torcao = [24*cr_F 0 0 -12*cr_F 6*1*cr_F 0 0 0 0; 0 8*1*1*cr_F 0 -
6*1*cr_F 2*1*1*cr_F 0 0 0 0;
0 0 2*cr_T 0 0 -cr_T 0 0 0; -12*cr_F -6*1*cr_F 0 24*cr_F 0 0 -12*cr_F
6*1*cr_F 0;
6*1*cr_F 2*1*1*cr_F 0 0 8*1*1*cr_F 0 -6*1*cr_F 2*1*1*cr_F 0; 0 0 -cr_T
0 0 2*cr_T 0 0 -cr_T;
0 0 0 -12*cr_F -6*1*cr_F 0 12*cr_F -6*1*cr_F 0; 0 0 0 6*1*cr_F
2*1*1*cr_F 0 -6*1*cr_F 4*1*1*cr_F 0;
0 0 0 0 0 -cr_T 0 0 cr_T];
%
% Matriz de Amortecimento
%
C_flexao_torcao = alfa*M_flexao_torcao + beta*K_flexao_torcao;
%
% Cálculo dos autovalores e autovetores
%
[V,D] = eig(K_flexao_torcao,M_flexao_torcao); % Autovetores V e Autovalores
D
FN = sqrt(D); % Frequências naturais (rad/s)
fn = FN/(2*pi); % Frequências naturais (Hz)

```

```

MN = V; % Modos normais de vibração
%
% Vetor Forçamento global de cada elemento forçamento
%
Q1 = [0;0;0;0;0;0;0;Q0;0;0]; % (N)
Q2 = [0;0;0;0;0;0;0;0;0;T0]; % (N.m)
%
% Análise computacional - Integrador
%
a = [zeros(9) eye(9);-IM*K_flexao_torcao -IM*C_flexao_torcao];
r = [zeros(9,9);IM];
y0 = zeros(1,18); % Condições iniciais - 9 deslocamentos iniciais iguais
% a zero (9 primeiros) e 9 velocidades iniciais iguais a zero (9 últimos)
tspan = [t1 t2]; % Intervalo de tempo para a integração das equações
[t,y] = ode45('equa3',tspan,y0);
n = length (t);
%
% Resultados deslocamento
%
u4=y(1:n,1);
u5=y(1:n,2);
u6=y(1:n,3);
u7=y(1:n,4);
u8=y(1:n,5);
u9=y(1:n,6);
u10=y(1:n,7);
u11=y(1:n,8);
u12=y(1:n,9);
%
% Resultados de velocidade
%
v4=y(1:n,10);
v5=y(1:n,11);
v6=y(1:n,12);
v7=y(1:n,13);
v8=y(1:n,14);
v9=y(1:n,15);
v10=y(1:n,16);
v11=y(1:n,17);
v12=y(1:n,18);
%
% Análise de tensões
%
% Tensões calculadas na seção do nó 1 do elemento 1
%
tau_1 = -(G*c/l)*u6; % Tensão de cisalhamento
sigma_1 = E*c*((6*u4/(l^2))+(-2*u5/l)); % Tensão normal de flexão
sigma_eq_1 = sqrt(sigma_1.^2 + 3*(tau_1.^2)); % Tensão equivalente de Von
Mises
%
% GRÁFICOS COM OS RESULTADOS
%
figure(1)
plot(t, (sigma_1)/1000000, 'b', t, (tau_1)/1000000, 'r'),title('Seção
transversal do nó 1')
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Tensão (MPa)')
Legend('Sigma(flexão)', 'Tau(torção)')

figure(2)

```



```

plot(t, (sigma_eq_1)/1000000), title('Tensão Equivalente de Von Mises na
seção do nó 1')
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Tensão (MPa)')

```

```

*****

```

```

function yp = equa3(t,y)

global a r wff wft Q1 Q2

Q = sin(wff*t);
Q3 = Q*Q1;
T = sin(wft*t);
Q4 = T*Q2;

Q5 = Q3 + Q4; % Vetor forçamento global

yp = a*y + r*Q5;

```

APÊNDICE F: Programa para análise dinâmica de vibração axial e transversal.

```

%
clear
close all
global a r wff wfa Q1 Q2
%
L0 = 1.2 ; % Comprimento total do tubo (m)
de = 0.1; % Diâmetro externo do tubo (m)
e = 0.001; % Espessura do tubo (m)
di = de - 2*e; % Diâmetro interno (m)
A = (pi/4)*(de^2 - di^2); % Área da seção transversal (m^2)
Iy = (pi/64)*(de^4 - di^4); % Momento de inércia de área em torno do eixo y
(m^4)
c = de/2; % Região de máxima tensão normal devido à flexão(m)
Ro = 7800; % Massa específica do material do tubo (Kg/m^3)
E = 207*(10^9); % Módulo de elasticidade do material do tubo (N/m^2)
%
% Dados dos elementos finitos
%
z = 3 ; % Número de elementos
l = L0/z; % Comprimento de cada elemento
%
% Intervalo de integração
%
t1 = 0;
t2 = 1;
%
% Dados do forçamento
%
Q0 = 100; % Amplitude do forçamento transversal (N)
F0 = 10000; % Amplitude do forçamento axial (N)
%
% Frequencia de forçamento
%

```

```

wff = 200; % Frequência de forçamento transversal (rad/s)
wfa = 200; % Frequência de forçamento axial(rad/s)
%
% Coeficientes da matriz de amortecimento proporcional
%
alfa = 0;
beta = 0;
%
% Matriz de Massa
%
cm_F = (Ro*A*1)/420; % Coeficiente da matriz de massa à flexão(Kg)
cm_A = (Ro*A*1)/6; % Coeficiente da matriz de massa à torção(Kg)
%
% Matriz Global de Massa
%
M_flexao_axial = [312*cm_F 0 0 54*cm_F -13*1*cm_F 0 0 0 0; 0 8*1*1*cm_F 0
13*1*cm_F -3*1*1*cm_F 0 0 0 0;
0 0 4*cm_A 0 0 cm_A 0 0 0; 54*cm_F 13*1*cm_F 0 312*cm_F 0 0 54*cm_F -
13*1*cm_F 0; -13*1*cm_F -3*1*1*cm_F 0 0 8*1*1*cm_F 0 13*1*cm_F -3*1*1*cm_F
0;
0 0 cm_A 0 0 4*cm_A 0 0 cm_A; 0 0 0 54*cm_F 13*1*cm_F 0 156*cm_F -
22*1*cm_F 0;
0 0 0 -13*1*cm_F -3*1*1*cm_F 0 -22*1*cm_F 4*1*1*cm_F 0; 0 0 0 0 0 cm_A
0 0 2*cm_A];
%
IM = inv(M_flexao_axial); % Inversa da Matriz de massa Global
%
% Matriz de Rigidez
%
cr_F = E*Iy/(l^3); % Coeficiente da matriz de rigidez axial (N/m)
cr_A = E*A/l; % Coeficiente da matriz de rigidez à torção (N/m)
%
% Matriz Global de Rigidez
%
K_flexao_axial = [24*cr_F 0 0 -12*cr_F 6*1*cr_F 0 0 0 0; 0 8*1*1*cr_F 0 -
6*1*cr_F 2*1*1*cr_F 0 0 0 0;
0 0 2*cr_A 0 0 -cr_A 0 0 0; -12*cr_F -6*1*cr_F 0 24*cr_F 0 0 -12*cr_F
6*1*cr_F 0;
6*1*cr_F 2*1*1*cr_F 0 0 8*1*1*cr_F 0 -6*1*cr_F 2*1*1*cr_F 0; 0 0 -cr_A
0 0 2*cr_A 0 0 -cr_A;
0 0 0 -12*cr_F -6*1*cr_F 0 12*cr_F -6*1*cr_F 0; 0 0 0 6*1*cr_F
2*1*1*cr_F 0 -6*1*cr_F 4*1*1*cr_F 0;
0 0 0 0 0 -cr_A 0 0 cr_A];
%
% Matriz de Amortecimento
%
C_flexao_axial = alfa*M_flexao_axial + beta*K_flexao_axial;
%
% Cálculo dos autovalores e autovetores
%
[V,D] = eig(K_flexao_axial,M_flexao_axial); % Autovetores V e Autovalores D
FN = sqrt(D); % Frequências naturais (rad/s)
fn = FN/(2*pi); % Frequências naturais (Hz)
MN = V; % Modos normais de vibração
%
% Vetor Forçamento global de cada elemento forçamento
%
Q1 = [0;0;0;0;0;0;0;Q0;0;0];
Q2 = [0;0;0;0;0;0;0;0;0;F0];
%
% Análise computacional - Integrador

```

```

%
a = [zeros(9) eye(9);-IM*K_flexao_axial -IM*C_flexao_axial];
r = [zeros(9,9);IM];
y0 = zeros(1,18); % Condições iniciais - 9 deslocamentos iniciais iguais
%a zero (9 primeiros) e 9 velocidades iniciais iguais a zero (9 últimos)
tspan = [t1 t2]; % Intervalo de tempo para a integração das equações
[t,y] = ode45('equa3',tspan,y0);
n = length (t);
%
% Resultados deslocamento
%
u4=y(1:n,1);
u5=y(1:n,2);
u6=y(1:n,3);
u7=y(1:n,4);
u8=y(1:n,5);
u9=y(1:n,6);
u10=y(1:n,7);
u11=y(1:n,8);
u12=y(1:n,9);
%
% Resultados de velocidade
%
v4=y(1:n,10);
v5=y(1:n,11);
v6=y(1:n,12);
v7=y(1:n,13);
v8=y(1:n,14);
v9=y(1:n,15);
v10=y(1:n,16);
v11=y(1:n,17);
v12=y(1:n,18);
%
% Análise de tensões
%
% Tensões calculadas na seção do nó 1 do elemento 1
%
sigma_a1 = -(E/l)*u6; % Tensão normal devido ao forçamento axial
sigma_f1 = E*c*((6*u4/(l^2))+(-2*u5/l)); % Tensão normal de flexão
sigma_result = sigma_a1 + sigma_f1; % Tensão resultante
%
% GRÁFICOS COM OS RESULTADOSRESULTADOS
%
figure(1)
plot(t, (sigma_a1)/1000000, 'b', t, (sigma_f1)/1000000, 'r'),title('Seção
transversal do nó 1')
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Tensão (MPa)')
Legend('Sigma(axial)', 'Sigma(flexão)')

figure(2)
plot(t, (sigma_result)/1000000),title('Tensão resultante na seção do nó 1')
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Tensão (MPa)')

*****

function yp = equa3(t,y)

```

```

global a r wff wfa Q1 Q2

Q = sin(wff*t);
Q3 = Q*Q1;
F = sin(wfa*t);
Q4 = F*Q2;

Q5 = Q3 + Q4; % Vetor forçamento global

yp = a*y + r*Q5;

```

APÊNDICE G: Programa para análise dinâmica de vibração axial, transversal e torcional.

```

%
clear
close all
%
global a r wff wft wfa Q1 Q2 Q3
%
L0 = 1.2 ; % Comprimento total do tubo (m)
de = 0.1; % Diâmetro externo do tubo (m)
e = 0.001; % Espessura do tubo (m)
di = de - 2*e; % Diâmetro interno (m)
A = (pi/4)*(de^2 - di^2); % Área da seção transversal (m^2)
Iy = (pi/64)*(de^4 - di^4); % Momento de inércia de área em torno do eixo y
(m^4)
J = (pi/32)*(de^4 - di^4); % Momento polar de inércia (m^4)
c = de/2; % região de máxima tensão normal, devido à flexão, e de
cisalhamento (m)
Ro = 7800; % Massa específica do material do tubo (Kg/m^3)
E = 207*(10^9); % Módulo de elasticidade do material do tubo (N/m^2)
G = 70*(10^9); % Módulo de elasticidade Transversal do material do tubo
(N/m^2)
%
% Dados dos elementos finitos
%
z = 3 ; % Número de elementos
l = L0/z; % Comprimento de cada elemento
%
% Intervalo de integração
%
t1 = 0;
t2 = 1;
%
% Dados do forçamento
%
Q0 = 1000; % Amplitude do forçamento Transversal (N)
F0 = 10000; % Amplitude do forçamento Axial (N)
T0 = 500; % Amplitude de forçamento Torçor (N.m)
%
% Frequência de forçamento
%
wff = 200; % Frequencia do forçamento transversal (rad/s)
wfa = 200; % Frequencia do forçamento axial(rad/s)
wft = 200; % Frequencia do forçamento torçor (rad/s)

```

```

%
% Coeficientes da matriz de amortecimento proporcional
%
alfa = 0;
beta = 0;
%
% Matriz de Massa
%
cm_F = (Ro*A*1)/420; % Coeficiente da matriz de massa à flexão(Kg)
cm_A = (Ro*A*1)/6; % Coeficiente da matriz de massa axial(Kg)
cm_T = (Ro*J*1)/6; % Coeficiente da matriz de massa à torção(Kg.m^2)
%
% Matriz Global de Massa
%
M_flexao_axial_torcao = [312*cm_F 0 0 0 54*cm_F -13*1*cm_F 0 0 0 0 0 0; 0
8*1*1*cm_F 0 0 13*1*cm_F -3*1*1*cm_F 0 0 0 0 0 0;
0 0 4*cm_A 0 0 0 cm_A 0 0 0 0 0; 0 0 0 4*cm_T 0 0 0 cm_T 0 0 0 0;
54*cm_F 13*1*cm_F 0 0 312*cm_F 0 0 0 54*cm_F -13*1*cm_F 0 0;
-13*1*cm_F -3*1*1*cm_F 0 0 0 8*1*1*cm_F 0 0 13*1*cm_F -3*1*1*cm_F 0 0;
0 0 cm_A 0 0 0 4*cm_A 0 0 0 cm_A 0; 0 0 0 cm_T 0 0 0 4*cm_T 0 0 0 cm_T;
0 0 0 0 54*cm_F 13*1*cm_F 0 0 156*cm_F -22*1*cm_F 0 0;
0 0 0 0 -13*1*cm_F -3*1*1*cm_F 0 0 -22*1*cm_F 4*1*1*cm_F 0 0; 0 0 0 0 0
0 cm_A 0 0 0 2*cm_A 0;
0 0 0 0 0 0 0 cm_T 0 0 0 2*cm_T];
%
IM = inv(M_flexao_axial_torcao); % Inversa da Matriz de massa Global
%
% Matriz de Rigidez
%
cr_F = E*Iy/(l^3); % Coeficiente da matriz de rigidez transversal (N/m)
cr_A = E*A/l; % Coeficiente da matriz de rigidez axial (N/m)
cr_T = (G*J)/(l); % Coeficiente da matriz de rigidez à torção (N.m/rad)
%
% Matriz Global de Rigidez
%
K_flexao_axial_torcao = [24*cr_F 0 0 0 -12*cr_F 6*1*cr_F 0 0 0 0 0 0; 0
8*1*1*cr_F 0 0 -6*1*cr_F 2*1*1*cr_F 0 0 0 0 0 0;
0 0 2*cr_A 0 0 0 -cr_A 0 0 0 0 0; 0 0 0 2*cr_T 0 0 0 -cr_T 0 0 0 0; -
12*cr_F -6*1*cr_F 0 0 24*cr_F 0 0 0 -12*cr_F 6*1*cr_F 0 0;
6*1*cr_F 2*1*1*cr_F 0 0 0 8*1*1*cr_F 0 0 -6*1*cr_F 2*1*1*cr_F 0 0; 0 0
-cr_A 0 0 0 2*cr_A 0 0 0 -cr_A 0;
0 0 0 -cr_T 0 0 0 2*cr_T 0 0 0 -cr_T; 0 0 0 0 -12*cr_F -6*1*cr_F 0 0
12*cr_F -6*1*cr_F 0 0;
0 0 0 0 6*1*cr_F 2*1*1*cr_F 0 0 -6*1*cr_F 4*1*1*cr_F 0 0; 0 0 0 0 0 0 -
cr_A 0 0 0 cr_A 0;
0 0 0 0 0 0 0 -cr_T 0 0 0 cr_T];
%
% Matriz de Amortecimento
%
C_flexao_axial_torcao = alfa*M_flexao_axial_torcao +
beta*K_flexao_axial_torcao;
%
% Cálculo dos autovalores e autovetores
%
[V,D] = eig(K_flexao_axial_torcao,M_flexao_axial_torcao); % Autovetores V e
Autovalores D
FN = sqrt(D); % Frequências naturais (rad/s)
fn = FN/(2*pi); % Frequências naturais (Hz)
MN = V; % Modos normais de vibração
%
% Vetor Forçamento global de cada elemento forçamento

```

```

%
Q1 = [0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;Q0;0;0;0];
Q2 = [0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;F0;0];
Q3 = [0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;T0];
%
% Análise computacional - Integrador
%
a = [zeros(12) eye(12);-IM*K_flexao_axial_torca -
IM*C_flexao_axial_torca];
r = [zeros(12,12);IM];
y0 = zeros(1,24); % Condições iniciais - 12 deslocamentos iniciais iguais
%a zero (12 primeiros) e 12 velocidades iniciais iguais a zero (12 últimos)
tspan = [t1 t2]; % Intervalo de tempo para a integração das equações
[t,y] = ode45('equa3',tspan,y0);
n = length (t);
%
% Resultados deslocamento
%
u5=y(1:n,1);
u6=y(1:n,2);
u7=y(1:n,3);
u8=y(1:n,4);
u9=y(1:n,5);
u10=y(1:n,6);
u11=y(1:n,7);
u12=y(1:n,8);
u13=y(1:n,9);
u14=y(1:n,10);
u15=y(1:n,11);
u16=y(1:n,12);
%
% Resultados de velocidade
%
v5=y(1:n,13);
v6=y(1:n,14);
v7=y(1:n,15);
v8=y(1:n,16);
v9=y(1:n,17);
v10=y(1:n,18);
v11=y(1:n,19);
v12=y(1:n,20);
v13=y(1:n,21);
v14=y(1:n,22);
v15=y(1:n,23);
v16=y(1:n,24);
%
% Análise de tensões
%
% Tensões calculadas na seção do nó 1 do elemento 1
%
sigma_a1 = -(E/l)*u7; % Tensão normal devido ao forçamento axial
sigma_f1 = E*c*((6*u5/(l^2))+(-2*u6/l)); % Tensão normal de flexão
sigma_result = sigma_a1 + sigma_f1; % Tensão resultante
tau_t1 = -(G*c/l)*u8;
sigma_eq_1 = sqrt(sigma_result.^2 + 3*tau_t1.^2);
%
% GRÁFICOS COM OS RESULTADOS
%
figure(1)
plot(t,(sigma_a1)/1000000,'b',t,(sigma_f1)/1000000,'r',t,(tau_t1)/1000000,'
g'),title('Seção transversal do nó 1')

```

```

xlabel('Tempo(s)')
ylabel('Tensão (MPa)')
Legend('sigma(axial)', 'sigma(flexão)', 'tau(torção)')

figure(2)
plot(t, (sigma_eq_1)/1000000), title('Tensão Equivalente de Von Mises na
seção do nó 1')
xlabel('Tempo(s)')
ylabel('Tensão (MPa)')

figure(3)
plot(t, (sigma_a1)/1000000, 'b', t, (sigma_f1)/1000000, 'r', t, (tau_t1)/1000000, '
g'), title('Seção transversal do nó 1')
xlabel('Tempo(s)')
ylabel('Tensão (MPa)')
Legend('sigma(axial)', 'sigma(flexão)', 'tau(torção)')
Legend('Caso 3')

figure(4)
plot(t, (sigma_eq_1)/1000000), title('Tensão Equivalente de Von Mises na
seção do nó 1')
xlabel('Tempo(s)')
ylabel('Tensão (MPa)')
Legend('Caso 3')

```

```
*****
```

```

function yp = equa3(t,y)

global a r wff wft wfa Q1 Q2 Q3

Q = sin(wff*t);
Q4 = Q*Q1;
T = sin(wft*t);
Q5 = T*Q3;
F = sin(wfa*t);
Q6 = F*Q2;

Q7 = Q4 + Q5 + Q6; % Vetor forçamento global

yp = a*y + r*Q7;

```

APÊNDICE H: Programa para análise de fadiga multiaxial

```

%
% ANÁLISE DE FADIGA MULTIAXIAL
%
% FORÇAMENTO EXTERNO: AXIAL E TORÇÃO
%
clear
close all
global a r wf_axial wf_torcao Q1 Q2
%

```

```

L0 = 1.2 ; % Comprimento total do tubo (m)
de = 0.1; % Diâmetro externo do tubo (m)
e = 0.001; % Espessura do tubo (m)
di = de - 2*e; % Diâmetro interno (m)
A = (pi/4)*(de^2 - di^2); % Área da seção transversal (m^2)
J = (pi/32)*(de^4 - di^4); % Momento polar de inércia (m^4)
c = de/2; % Região de máxima tensão de cisalhamento (m)
Ro = 7800; % Massa específica do material do tubo (Kg/m^3)
E = 207*(10^9); % Módulo de elasticidade do material do tubo (N/m^2)
G = 70*(10^9); % Módulo de elasticidade transversal do material do tubo
(N/m^2)
%
% Dados dos elementos finitos
%
z = 3 ; % Número de elementos
l = L0/z; % Comprimento de cada elemento
%
% Intervalo de integração
%
t1 = 0;
t2 = 0.05;
%
% Dados do forçamento
%
F0 = 10000; % Amplitude do forçamento Axial (N)
T0 = 750; % Amplitude do forçamento Torçor (N.m)
%
% Frequência de forçamento
%
wf_axial = 200; % (rad/s)
wf_torca = 200; % (rad/s)
%
% Coeficientes da matriz de amortecimento proporcional
%
alfa = 0;
beta = 0;
%
% Matriz de Massa
%
cm_A = (Ro*A*l)/6; % Coeficiente da matriz de massa axial(Kg)
cm_T = (Ro*J*l)/6; % Coeficiente da matriz de massa à torção(Kg.m^2)
%
% Matriz Global de Massa
%
M_axial_torca = [4*cm_A 0 cm_A 0 0 0; 0 4*cm_T 0 cm_T 0 0; cm_A 0 4*cm_A 0
cm_A 0; 0 cm_T 0 4*cm_T 0 cm_T;
0 0 cm_A 0 2*cm_A 0; 0 0 0 cm_T 0 2*cm_T];
%
IM = inv(M_axial_torca); % Inversa da Matriz Global de Massa
%
% Matriz de Rigidez
%
cr_A = (E*A)/(l); % Coeficiente da matriz de rigidez axial (N/m)
cr_T = (G*J)/(l); % Coeficiente da matriz de rigidez à torção (N.m/rad)
%
% Matriz Global de Rigidez
%
K_axial_torca = [2*cr_A 0 -cr_A 0 0 0; 0 2*cr_T 0 -cr_T 0 0; -cr_A 0
2*cr_A 0 -cr_A 0;
0 -cr_T 0 2*cr_T 0 -cr_T; 0 0 -cr_A 0 cr_A 0; 0 0 0 -cr_T 0 cr_T];
%

```



```

% Matriz de Amortecimento
%
C_axial_torca = alfa*M_axial_torca + beta*K_axial_torca;
%
% Vetor Forçamento global de cada elemento forçamento
%
Q1 = [0;0;0;0;F0;0]; % (N)
Q2 = [0;0;0;0;0;T0]; % (N.m)
%
% Análise computacional - Integrador
%
a = [zeros(6) eye(6);-IM*K_axial_torca -IM*C_axial_torca];
r = [zeros(6,6);IM];
y0 = zeros(1,12); % Condições iniciais - 6 deslocamentos iniciais iguais
%a zero (6 primeiros) e 6 velocidades iniciais iguais a zero(6 últimos)
tspan = [t1 t2]; % Intervalo de tempo para a integração das equações
[t,y] = ode45('equa2',tspan,y0);
n = length (t);
%
% Resultados deslocamento
%
u3=y(1:n,1);
u4=y(1:n,2);
u5=y(1:n,3);
u6=y(1:n,4);
u7=y(1:n,5);
u8=y(1:n,6);
%
% Análise de tensões
%
% Tensões calculadas na seção do nó 1 do elemento 1
%
tau_1 = -(G*c/l)*u4; % Tensão de cisalhamento
sigma_1 = -(E/l)*u3; % Tensão normal
%
% Deformação
%
gama_1 = tau_1/G;
epislon_1 = sigma_1/E;
%
% Direção das tenões principais na seção do nó 1 do elemento 1
%
teta_1 = 0.5*atan(2*tau_1./sigma_1);
%
% Raio do círculo de Mohr
%
raio = sqrt((sigma_1/2).^2 + (tau_1).^2);
%
% Variação da tensão de cisalhamento ao longo do tempo
%
% tet = 0°
%
tau_linha_1_z = -0.5*sigma_1*sin(2*0) + tau_1*cos(2*0);
%
% tet = pi/8
%
tau_linha_1_o = -0.5*sigma_1*sin(2*(pi/8)) + tau_1*cos(2*(pi/8));
% tet = pi/4
%
tau_linha_1_q = -0.5*sigma_1*sin(2*(pi/4)) + tau_1*cos(2*(pi/4));
%

```

```

% tet = pi/2
%
tau_linha_1_d = -0.5*sigma_1*sin(2*(pi/2)) + tau_1*cos(2*(pi/2));
%
% tet = 3pi/4
tau_linha_1_tq = -0.5*sigma_1*sin(2*(3*pi/4)) + tau_1*cos(2*(3*pi/4));
%
% tet = pi
%
tau_linha_1_u = -0.5*sigma_1*sin(2*pi) + tau_1*cos(2*pi);
%
% Círculos de Mohr
%
tet= 0:0.01:pi; % Variação da direção do plano
%
% Instante qualquer, a
%
sigma_linha_1_a = 0.5*(-5.8770)*(1 + cos(2*tet)) + (-7.5216)*sin(2*tet);
tau_linha_1_a = -0.5*(-5.8770)*sin(2*tet) + (-7.5216)*cos(2*tet);
centro_a = -0.5*5.8770;
%
% Instante qualquer, b
%
sigma_linha_1_b = 0.5*(-21.3970)*(1 + cos(2*tet)) + (-31.6060)*sin(2*tet);
tau_linha_1_b = -0.5*(-21.3970)*sin(2*tet) + (-31.6060)*cos(2*tet);
centro_b = -0.5*21.3970;
%
% Eixos
%
a = -100:0.1:100;
var_1 = a;
var_2 = 0;

```